This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

BIBLIOTECA RICCARDI
in Modena
S. II F. 4ª N. 53.

ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM CIRCUMSPICE

QA
35
.C586
L5
1749

D. CLAIRAUT
ELEMENTA
GEOMETRIÆ.

ELEMENTA
GEOMETRIÆ
A D. CLAIRAUT

REGIÆ SCIENTIARUM
PARISIENSIS ACCADEMIÆ,
ET REGIÆ
SOCIETATIS LONDINENSIS
SOCIO

Gallico ſermone edita, Latine reddita.

VENETIIS,
MDCCXLIX.

APUD JOANNEM BAPTISTAM RECURTI.
SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIO.

NU

PRÆFATIO.

QUamquam Geometria non niſi in abſtractarum rerum contemplatione verſatur, nemo tamen erit qui dubitet, quin difficultates plurimæ initio Tyronibus occurrentes, ex docendi ratione, & ex elementorum methodo producantur. Ea enim primum ſæpe numero traditur definitionum, poſtulatuum, axiomatum, & principiorum copia, ut nihil utile, nihil jucundum ſibi polliceri poſſe videatur. Accedunt propoſitiones, quæ cum hinc nullius momenti ſint, illinc difficillimæ captu, Tyrones animo cadunt, & a conſilio prius avertuntur, quam ideam diſcendæ diſciplinæ conceperint.

Nonnulli ut hujuſmodi auferrent incommodum poſt quamcunque eſſentialem propoſitionem illius practicum uſum expoſuere. Atque hinc utilitatem quidem geometriæ oſtenderunt, quin tamen faciliorem traderent diſcendi methodum. Quum enim omnis propoſitio practicum uſum antecedat, mens ad ideas ſenſibiles non accedit, niſi prius maximo labore plures acquiſierit abſtractiſſimas.

Verum quum ad Geometriæ originem animadvertiſſem, hoc incommodum ablaturum exiſtimavi, ſi Tyrones utiliori ſimul, ac faciliori methodo erudirentur. Mecum enim animo duxi & diſciplinam hanc, uti ceteras omnes, gradatim fuiſſe inſtitutam, & ex aliqua neceſſitate primos gradus acquiſiviſſe, nec hoſce gradus Tyronum vires ſuperare, quum a Tyronibus primo facti intelligantur.

Hoc præventus conſilio ab eo exordiri cenſui, unde Geometria originem duxit, & principia explicare na-

turali

turali illa methodo, quæ primorum Geometrarum fuiſſe videretur, eas tantummodo evitans falſas experientias, quibus ipſi obnoxii neceſſario fuere.

Ad primas autem Geometriæ propoſitiones inſtituendas aptior fuiſſe mihi videtur agrorum dimenſio; ex hac enim hujuſce facultatis habetur origo, quum Geometria idem ſignificet, ac *terræ dimenſio*. Auctores nonnulli contendunt Ægyptios prima jeciſſe Geometriæ fundamenta, ut agrorum ſuorum limites reſtituerent Nili inundatione deſtructos. Verum etſi nulla his Auctoribus haberetur fides, minime tamen dubitari poſſet, quin primis temporibus homines methodum dimetiendi, ac dividendi agros inveſtigarint; Quam deinde perficere cupientes ex peculiaribus quæſtionibus ad generales inveſtigationes ſenſim traducti ſunt. In quibus tandem cujuſque magnitudinis rationes examinantes eam inſtituerunt diſciplinam, cujus objectum longius, latiuſque pateret eo, quod initio amplexi fuerant; eique nomen primo inditum ſervavere.

Ne vero in hoc opere longe diſcedam ab eorum veſtigiis, qui primo Geometriam excoluere, Tyronibus principia exponam, a quibus pendere poteſt dimenſio agrorum, & diſtantiarum acceſſibilium, ſive inacceſſibilium &c. Hinc ad alias inveſtigationes progrediar, quarum ea erit cum primis analogia, ut in ipſis immorentur Tyrones naturali quadam ducti cupiditate diſcendi; quam deinde utilibus fovens exercitationibus omnia percurram, quæ jucundiora, atque majoris momenti exiſtimantur in elementari Geometria.

Nemo autem mea ſententia inficiari poterit hac methodo eos non excitari, qui ex veritatum Geometricarum ſiccitate a ſtudio hujus diſciplinæ averti faciliime potuiſſent; at ſpero equidem majori uſui etiam

futu-

futuram, quum intellectus hujuſmodi conſuetudine ad inquirendum, & ad inveſtigandum aſſueſcat; Nullam enim tradam propoſitionem ſub theorematum methodo, qua ſcilicet oſtenditur veritas aliqua, quin ad illam inveniendam methodus demonſtretur.

Equidem primi mathematicarum rerum auctores ſub theorematum forma eorum inventa nobis tradidere, ſive ut admirabiliora viderentur, ſive ut evitarent incommodum idearum ſeriem texendi, quibus ad ea pervenere. Ceterum mihi profecto viſum eſt opportunius, ut Lectores in problematum reſolutione ſemper exerceam, in ea ſcilicet quærenda methodo, qua aut incognita veritas inveniatur, aut determinetur ratio inter datas, & incognitas magnitudines; Cui inhærentes Tyrones & rationem gradatim percipiant, & faciliorem acquirant conſuetudinem inveniendi.

Verum nolim mihi vitio vertatur in his Geometriæ elementis oculorum teſtimonio me plurimum fidere, & a gravioribus demonſtrationibus plus æquo diſcedere; Etenim eas tantum negligo, quæ ita ſunt in promptu, ut res demonſtratione non egeat, maxime elementorum initio, ubi frequentiores occurrunt hujuſmodi propoſitiones; Perſpectum enim habeo eos qui aptiorem ad Geometriam intellectum ſortiuntur, quam lubentiſſime ipſius exercitationi indulgere, & contra facillime averti, quum demonſtrationibus, ut ita dicam, inutilibus opprimuntur.

Non autem mirandum, quod Euclides oſtendat aut duobus circulis ſe mutuo ſecantibus idem eſſe centrum, aut latera trianguli ab altero comprehenſi minora eſſe lateribus trianguli comprehendentis. Ipſi enim res erat cum Sophiſtis pertinaciſſimis, qui clarioribus veritatibus obſiſtere gloriabantur. Neceſſario igitur

Geo-

Geometria, ſicuti Logica, fulcienda erat argumentationibus, ut inanibus verbis omnis omnino aditus clauderetur. Verum non ita res modo ſe habet, inepta enim prorſus ratiocinatio cenſenda eſt, quæ circa clariſſimam veritatem verſatur, immo & huic obſcuritatem, & lectoribus faſtidium videtur afferre.

Vereor etiam, ne cui maxime improbandum videatur; quod nonnullas ſilentio præteream propoſitiones, quæ in conſuetis elementis aliquem locum obtinent, & tantummodo principia tradam fundamentalia, quum de propoſitionibus agam.

At in hoc tractatu nihil omnino deſideratur, quo conſilium meum compleri poſſit, eæque tantum omittuntur propoſitiones, quæ neque illi uſui ſunt, neque ad earum faciliorem conducunt intelligentiam, quæ majoris cenſentur utilitatis. Quod de iis dicam, ſat erit profecto ut elementares propoſitiones, quæ illas ſupponunt, facillime intelligantur. De hoc accuratius inſtituam tractationem in Algebræ elementis, quæ in poſterum publici juris faciam.

Tandem quoniam dimenſionem agrorum ad Tyronum utilitatem ſelegi, minime vereor ne hæc elementa cum ceteris id genus tractatibus confundantur; Hoc enim iis contingere nullimode poteſt, qui ſecum animo reputent agrorum dimenſionem non eſſe verum hujuſce tractatus objectum, ſed occaſionem ſolum exhibere ad principes Geometriæ veritates explicandas. Harum equidem veritatum conſecutionem revocare potuiſſem ab hyſtorica inſtitutione Phyſicæ, aut Aſtronomiæ, aut quarumcunque Matheſeos partium: at aliarum idearum copia, quibus mens diſtraheretur, geometricas ideas quodammodo obruiſſet, in quarum ſola contemplatione lectorem immorari contendo.

D. CLA-

D. CLAIRAUT ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIMA.

DE NATURALI METHODO AGROS DIMETIENDI.

I.

Quod primo metiendum fuiſſe videtur, longitudines ſunt, ac diſtantiæ.

UT longitudo quæcumque dimetiatur, ex naturali Geometria nobis compertum eſt longitudinem dimenſionis cognitæ cum incognita eſſe comparandam.

II.

Linea recta eſt minima omnium, quæ inter duo puncta duci poſſunt; & ideo eſt menſura diſtantiæ inter ipſa.

Ut diſtantia dimetiatur quæ duobus punctis intercipitur, ab uno ad aliud punctum ducatur linea recta, & cum hac dimenſio

cognita comparetur: omnes enim aliæ quum neceſſario majus, minuſve ſpatium percurrant, linea recta longiores ſunt.

III.

Recta ſuper rectam inſiſtens, & in neutram partem inclinans eſt perpendicularis.

Tab. 1. Fig. 1. Præter punctorum diſtantiam ea ſæpe ſæpius dimetienda eſt, quæ inter punctum, & lineam invenitur. Sit ex. gr. homo in fluminis ripa puncto D. conſtitutus, qui diſtantiam a puncto D. ad ripam A B invenire velit. Certum eſt, ut hæc diſtantia metiatur, ducendam eſſe lineam minorem omnibus rectis D A, D B &c. quæ a puncto D ad rectam A B duci poſſunt. Sed hæc recta omnium minima eſt D C, quæ ex hypotheſi neque in A inclinat, neque in B; ergo ad hanc, quæ perpendicularis vocatur, menſura cognita comparanda eſt, ut habeatur diſtantia D C a puncto D ad rectam A B. Verum ut hæc menſura ſuper lineam D C collocetur, hujuſmodi linea jam ducta ſupponi debet; quare methodus neceſſario inſtituenda eſt ad perpendiculares ducendas.

IV.

Rectangulum eſt figura quatuor laterum ſibi invicem perpendicularium.

Quadratum vero eſt rectangulum, cujus quatuor latera æqualia ſunt.

Per-

Perpendicularium uſus frequentiſſimus eſt; Fig. 2. & 3.
Conſtat enim e. g. figuris regularibus ABCD, FGHI, quæ rectangula appellantur, & quatuor lateribus ſibi invicem perpendicularibus componuntur, domos conſtrui, viridaria, cubicula, muros &c. ædificari.

Harum figurarum prima ABCD, cujus quatuor latera æqualia ſunt, quadratum communiter nuncupatur. Altera vero FGHI, cujus oppoſita tantum latera æqualia ſunt, rectanguli nomen retinet.

V.

§. 2. Modus perpendicularem excitandi.

In variis multiſque operationibus, quæ perpendiculares poſtulant, modo ex dato extra rectam puncto demitti debet perpendicularis ad hanc rectam, modo ex dato puncto in eadem recta perpendicularis excitari.

Si ex dato puncto C in recta AB excitanda ſit recta CD perpendicularis ad AB; hæc recta neque ad A, neque ad B inclinare debet. Si igitur ſit punctum C æqualiter diſtans a puncto A, & B, & recta CD in neutram partem inclinet, quodcumque punctum hujus rectæ erit æqualiter diſtans a punctis A, & B; ſolum igitur inveniendum ſupereſt punctum D quod æqualiter diſtet ab A, & B: nam linea CD ducta a puncto C ad punctum D erit perpendicularis quæſita. Fig. 4.

Ut habeatur punctum D, pertentando poſ-

ſet inveſtigari, verum quum hujuſmodi incerta exploratio intellectui minime ſatisfaciat, operæ pretium erit methodum clariorem inquirere.

Quare adhibeatur communis menſura ſive funis ex. gr. ſive circinus pro loci opportunitate.

Si altera hujus menſuræ ſive funis, ſive circini extremitas in puncto A maneat, altera in orbem circumagatur, habebitur arcus P D M. Deinde ſi eodem intervallo, eodemque modo a puncto B deſcribatur arcus Q D N, qui in puncto D primum ſecet, D erit punctum quæſitum.

Etenim D æqualiter diſtabit ab A, & B, quum æqualiter pertineat ad arcus P D M, & Q D N eodem intervallo deſcriptos, igitur recta C D neque ad A, neque ad B inclinabit; ergo erit perpendicularis ad A B.

Fig. 5. Si vero punctum C non æqualiter diſtet ab A & B, accipiantur *a* & *b* æqualiter diſtantia a puncto C, & ab ipſis communi intervallo deſcribantur arcus P D M, Q D N.

VI.

Circulus eſt linea deſcripta ab una circini extremitate in orbem acta, altera immobili permanente. Ejus centrum eſt punctum, ubi extremitas circini manet immobilis. Radius vero eſt intervallum, quo circinus in deſcribendo circulo aperitur.

Fig. 4. Si arcus P D M producatur in O, E, R, &c. uſque ad idem punctum P, peripheria cir-

circuli, ſive circulus tantum apellabitur.

Pars peripheriæ, P D M arcus circuli,

Punctum A centrum,

Et intervallum A D radius.

Diameter dupla eſt radio.

Omnes rectæ, ut D A E, quæ ad circumferentiam utrinque productæ per centrum tranſeunt, vocantur Diametri, & quum radio duplæ ſint, radius interdum ſemidiameter nuncupatur.

VII.

Modus perpendicularem demittendi.

Ex methodo excitandi perpendicularem ad rectam A B; modus eruitur illam demittendi a quocumque puncto extra hanc rectam dato E; etenim in puncto E conſiſtat extremitas aut fili, aut circini, & datis in recta A B duobus punctis *a*, & *b*, eodem intervallo E *b* inveniatur, ut in articulo præcedenti, punctum D, quod æqualiter ab *a* & *b* diſtet; & a puncto D ad punctum E ducatur recta D E, hæc erit perpendicularis ad A B, quum æqualiter diſtet ab *a* & *b*, & in neutram partem inclinet. *Fig. 6.*

VIII.

Datam rectam biſariam ſecare.

Ex præcedenti operatione ſequitur ſolutio novi problematis. *Fig. 7.*

Ut recta A B biſariam ſecetur, a centris A, & B quocumque intervallo deſcribantur ar-

cus R E I, S E F : deinde ab iiſdem centris, eodem, aut alio quolibet intervallo deſcribantur arcus P D M, Q D N, & ducatur recta E D, quæ puncta interſectionis E, & D conjungat : hæc bifariam ſecabit rectam A B in puncto C.

I X.

Ex data recta quadratum conficere.

Ex præhabita methodo perpendiculares ducendi facile conficiuntur figuræ, quæ rectangula, & quadrata vocantur, de quibus in articulo IV. ; nam ut deſcribatur quadratum A B C D, cujus latera ſint æqualia datæ rectæ K, accipiatur ex recta G E intervallum A B æquale ad K ; deinde excitentur (Articulo V.) a punctis A & B perpendiculares A D, B C æquales ad K, & ducatur recta D C. *Fig. 2.*

X.

Rectangulum deſcribere data ejus longitudine ac latitudine.

Fig. 3. Si inquiratur rectangulum F G H I, cujus longitudo ſit K, & latitudo L ; accipiatur F G æqualis ad K, & excitentur perpendiculares F I, & G H æquales ad L ; deinde ducatur recta H I.

XI.

X I.

Parallelæ ſunt rectæ æqualibus ſemper intervallis inter ſe diſtantes.

Per datum punctum ducere parallelam ad datam rectam.

Frequentiſſime, ut in aggeribus, canalibus, viis &c. conſtruendis, lineæ parallelæ duci debent, eæ videlicet, quarum intervalla ubique perpendicularibus ejuſdem longitudinis dimetiantur. Ad eas ducendas nil aptius videtur methodo, quæ ſuperius in rectangulis conficiendis adhibita eſt. Sit A B ex. gr. latus canalis, aut aggeris, cujus latitudo eſſe debeat C A, ſive ut quæſtio geometrice magis, & univerſim enuncietur: per punctum C ducenda ſit recta C D parallela ad A B. Accipiatur quodcumque punctum B ſuper rectam A B, & eodem modo agatur, ac ſi data baſi A B conſtituendum eſſet rectangulum A B C D, cujus altitudo eſſet A C; Tunc enim rectæ C D, & A B etiam in infinitum productæ ſemper parallelæ erunt, ſeu quod idem eſt, nunquam concurrent. *Fig.* 8.

X I I.

Menſura rectanguli eſt productum altitudinis in baſim.

Quum figurarum rectangularium uſus, ut diximus, ob earum regularitatem ſit frequentiſſimus, ſæpe numero earundem extenſio in-

quiratur neceſſe eſt. Erit ex. gr. determinandum quot periſtromata neceſſaria ſint ad cubiculum exornandum, ſive quot jugera contineantur in ambitu domus rectanguli formam habentis.

Ad hujuſmodi determinationes habendas facilior, atque ſimplicior methodus videtur communis menſura, quæ pluries ſuperficiei metiendæ applicata, eam integre complectatur. Hujuſmodi methodus illi æquivalet, quæ in determinanda linearum longitudine tradita eſt.

Verum communis ſuperficierum menſura, & ipſa manifeſte ſuperficies eſt, ut menſura unius perticæ, ſive pedis quadrati. Hinc rectangulum metiri idem eſt ac numerum determinare perticarum, aut pedum quadratorum, qui in ipſius ſuperficie continentur.

Res exemplo clarius, ac minori intellectus conatu percipietur. Sit rectangulum A B C D, *Fig. 9.* cujus altitudo ſit ſeptem pedum, & baſis 8.; ſi hoc conſideretur ut diviſum in ſeptem partes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, quarum quæque contineat octo pedes quadratos; valor rectanguli erit ſepties octo pedes quadrati, ideſt quinquaginta ſex.

Interim ſi animadvertatur, ut in primis calculi arithmetici elementis, multiplicationem duorum numerorum in eo eſſe ſitam, ut unus toties accipiatur, quoties unitas in alio continetur; innoteſcet procul dubio perfecta analogia inter communem multiplicationem, & operationem qua rectangulum metitur. Hinc ex multiplicatione numeri perticarum, ſive pedum altitudinis in numerum pertica-

ticarum ſive pedum baſis deducetur quantitas perticarum, ſeu pedum quadratorum, qui in ea ſuperficie continentur.

XIII.

Figuræ rectilineæ eæ ſunt quæ rectis lineis conficiuntur.

Triangulum eſt figura tribus rectis terminata.

Figuræ dimetiendæ non ſemper regulares ſunt, ut rectangula, & tamen earum menſura ſæpe neceſſaria eſt. Modo enim determinanda eſt extenſio operis in fundo irregulari conſtituti, modo inquirendum quot jugera contineantur in fundo irregulariter terminato. Opus eſt igitur, ut metitis rectangulis dimetiantur figuræ, quæ rectangulares non ſunt.

Manifeſtum eſt in praxi totam difficultatem eſſe in figuris rectilineis metiendis, ut A B C D E, iis nempe quæ rectis lineis conficiuntur. *Fig.* 10. Etenim ſi ager aliquis non nullis lineis curvis terminetur, ut Fig. A B C D E F G, lineæ iſtæ adeo diviſæ, ut error ſenſibilis auferatur, accipi poterunt, uti linearum rectarum compago. *Fig.* 11.

His præhabitis etſi propemodum infinita ſuppetant figurarum rectilinearum genera, omnes eodem modo metiri poſſunt, eas nempe dividendo in figuras trium laterum, quæ triangula communiter appellantur. Quod ſimpliciori modo præſtabitur, ſi ex quocumque dato puncto A in circuitu figuræ A B C D E ducantur rectæ A C, A D, &c. ad puncta C, & D &c.

XIV.

XIV.

Diagonalis rectanguli eſt linea, quæ ipſum dividit in duo triangula æqualia.

Modo triangulorum dimenſio quærenda ſupereſt. Ut quod ignoratur inveniri poſſit, nil tutius profecto quam quærere an in re cognita quidpiam ſit, quod ad rem cognoſcendam referatur. Sed ut ſupra oſtenſum eſt, Rectan-
Fig. 12. gulum ABCD eſt æquale producto baſis AB in altitudinem CB, & aliunde facile dignoſcitur figuram tranſverſaliter ſectam a linea AC, quæ diagonalis vocatur, dividi in duo triangula æqualia; ergo ſingula triangula æquabunt dimidium producti eorum baſis AB, ſive DC in altitudinem CB, ſive DA.

Triangula rectangula ea ſunt, quorum duo latera ſibi invicem ſunt perpendicularia.

Etſi raro contingat triangula metienda conſtitui duobus lateribus ſibi invicem perpendicularibus, ut triangula ABC, ADC, quæ triangula rectangula nominantur; tamen nihil obſtat quin omnia ad id genus reduci poſſint.

Nam ſi ex puncto A, vertice cujuſcumque trianguli ABC demittatur AD perpendicularis ad baſim BC, triangulum ABC diviſum erit in duo triangula rectangula ABD, ADC.

Trian-

Triangulum eſt dimidium rectanguli ſuper eadem baſi, & in eadem altitudine conſtituti.

Igitur ſicuti ex ſupradictis duo triangula ABD, ADC ſunt dimidia rectangulorum AEBD, ADCF, triangulum datum ABC erit dimidium rectanguli EBCF, cujus baſis erit BC, & altitudo AD: Sed quoniam ſuperficies rectanguli EBCF æquabit productum ex altitudine EB, ſive AD in baſim BC, cujus menſura erit dimidium producti ex altitudine in baſim; Trianguli ABC erit dimidium producti ex baſi BC in perpendicularem AD, trianguli altitudinem.

Hinc habetur methodns agros omnes rectis lineis terminatos dimetiendi. Etenim nullus omnino ager eſt, qui ad triangula reduci non poſſit, & nullum triangulorum, de cujus vertice perpendicularis ad baſim non poſſit demitti.

XV.

Triangula ſuper eadem baſi & eadem altitudine conſtituta ſuperficiem habent æqualem.

Cum ex dicta methodo areæ, & ſuperficies triangulorum menſurentur tantum ex eorum baſi in altitudinem, nulla habita ratione longitudinis laterum, neceſſario ſtatuitur hoc theorema: Omnia Triangula ut ECB, ACB, quæ habent eamdem baſim CB, & æquales altitudines EF, AD, eamdem habent ſuperficiem.

XVI.

XVI.

Ut hoc principium ex quo dimenſio eruitur triangulorum, facilius intelligeretur, latus illud ut baſis ſelectum fuit, in quod ex oppoſito vertice caderet perpendicularis: quod profecto in agrorum dimenſione ſemper præſtari poteſt. Sed quoniam in comparatione triangulorum eamdem baſim habentium perpendiculares cadere poſſunt extra triangu-
Fig. 15. lum, ut in Fig. 15. neceſſario inveſtigandum videtur an de cæteris triangulis ut BCG hoc idem poſſit comprobari, an ſcilicet ſint dimidia rectangulorum ECBF eamdem altitudinem habentium perpendicularem GH. Verum hoc facile demonſtratur. Etenim Triangulum CGH ſumma triangulorum CGB, GBH eſt dimidium rectanguli ECHG, hoc eſt dimidium ſummæ rectangulorum ECBF, FBHG; ergo triangula CGB, GBH ſimul ſumpta ſunt dimidia rectanguli ECHG; ſed triangulum GBH eſt dimidium rectanguli FBHG, ergo propoſitum triangulum BCG eſt dimidium alterius rectanguli ECBF, cujus baſis eſt BC, & altitudo GH.

XVII.

Triangula ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas conſtituta habent ſuperficiem æqualem.

Propoſitio in tribus præcedentibus articulis demonſtrata poteſt generaliter hoc modo enun-

enunciari : Triangula EBC, ABC, GBC *Fig.16.* æqualia ſunt ſi ſuper eadem baſi BC, & inter eaſdem parallelas EAG, CBH ſint conſtituta ; hoc eſt ſi eorum vertices E, A, G ſint in eadem recta EAG parallela ad rectam CB. Tunc enim (Artic. XI.) eorum altitudines, ſi perpendicularibus dimetiantur, invenientur æquales.

XVIII.

Parallelogramma ſunt figuræ quadrilateræ, quarum bina oppoſita latera ſunt parallela : & dimetiuntur multiplicando eorum altitudinem in baſim.

Inter varia figurarum rectilinearum genera quæ methodo præcedenti metiri compertum eſt ; nonnullæ figuræ ſunt quæ eamdem fere habent regularitatem ac rectangula, ut ex. gr. figura ABCD quatuor lateribus terminata, & cujus bina oppoſita latera ſunt parallela. *Fig.17.* Vocantur Parallelogramma ; & exceptis rectangulis, facilius quam ceteræ figuræ rectilineæ dimetiuntur. Si enim parallelogrammum ABCD in duo triangula ABC, ACD dividatur, hæc duo triangula erunt æqualia ; ergo ſicut quodlibet horum triangulorum erit dimidium producti ex altitudine AF in baſim BC, ita parallelogrammum erit totum productum baſis BC in altitudinem AF.

XIX.

Parallelogramma ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas conſtituta ſunt æqualia.

Ex dictis ſequitur omnia parallelogramma
Fig. 18. aut 19. ABCD, EBCF ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas conſtituta eſſe æqualia. Quod nulla etiam habita præcedentium ratione facile ſic oſtenditur. Nam Parallelogrammum ABCD evadat parallelogrammum EBCF ſi ipſi addatur triangulum DCF, & ex tota figura ABCF demater triangulum ABE: ergo poſitis duobus triangulis DCF, ABE æqualibus, parallelogrammum ABCD eamdem retinet extenſionem evadens parallelogrammum EBCF. Ut autem æqualitas horum duorum triangulorum demonſtretur, hoc unum ſat erit animadvertere, cum latera AB, CD æque ſint parallela ac BE, CF, triangulum ABE eſſe triangulum DCF ita quodammodo prolapſum, ut punctum A pervenerit in D, & punctum E in F.

XX.

Poligona regularia ſunt quæ terminantur lateribus æqualibus æqualiter ſibi invicem inclinatis.

Illæ quoque figuræ rectilineæ facile dimetiuntur quæ Poligona regularia vocantur, & terminantur æqualibus lateribus eamdem ſibi invicem inclinationem habentibus, ut fi-

guræ:

guræ: A B D E F, A B D E F G, A B D E F G H. Fig.20.
Sicuti harum figurarum forma vaſa, fontes, 21.22.
aut publica loca conſtrui ſolent, operæ pretium exiſtimo antequam dimetiantur, quomodo deſcribantur oſtendere.

XXI.

Modus deſcribendi poligonum quod habeat determinata latera.

Circuli peripheria deſcribatur, ac dividatur in tot partes, quot poligono adſcribi velint. Deinde per puncta A, B, D, E quæ Fig.22.
peripheriam dividant, ducantur rectæ A B, B D, D E &c. Hæ deſcribent poligonum quæſitum, quod Pentagonum, Hexagonum, Heptagonum, Octagonum, Nonagonum, Decagonum &c. apellabitur, ſi quinque, ſex, ſeptem, octo, novem, decem &c. fuerint ejus latera.

XXII.

Menſura ſuperficiei cujuſcumque poligoni regularis.

Poligoni regularis menſura haberi poſſet methodo pro omnibus rectilineis figuris tradita (Art. XIII.) Verum facile intelligitur breviori via procedi poſſe ſi poligonum in æqualia triangula dividatur, quorum omnium vertex ſit centrum C. Nam ſi ſumatur trian- Fig.22.
gulum C B D ex. gr., & ad baſim B D ducatur perpendicularis C K, area hujus trianguli erit productum ex baſi B D in dimidium

per-

perpendicularis CK : ergo ſi hoc productum toties ſumatur quot ſunt poligoni latera, habebitur menſura areæ totius poligoni,

XXIII.

Modus deſcribendi triangulum æquilaterum, quod videlicet tria latera habet æqualia.

Si circuli peripheria in tres tantum æquales partes dividatur, triangulum habebitur, æquilaterum communiter nuncupatum : ſi dividatur in quatuor partes, quadratum habebitur. Verum hæ duæ figuræ poligonorum omnium ſimpliciſſimæ ſine circuli diviſione facile deſcribi poſſunt, ut de quadrato oſtenſum eſt (Art. IX.) Triangulum autem æquilaterum facile deſcribitur ſuper datam baſim
Fig.23. AB, ſi ex punctis A & B ut centris deſcribantur arcus DCF & GCH circini intervallo æquali baſi AB, & deinde ſi ex punctis iiſdem A, B ducantur rectæ AC, BC ad punctum C, quod eſt communis ſectio arcuum DCF, GCH, & vertex trianguli.

XXIV.

Prædictæ methodo, qua triangulum æquilaterum & quadratum omnium poligonorum præcipua conficiuntur, addi poſſet geometrica pentagoni deſcriptio, ut plures in elementis præſtitere. Sed quoniam Tyrones quibus ſolis hæc elementa exhibentur, difficillime intelligerent qua via progredi debuiſſet in inquiſitione

tione methodi hujuſcemodi figuras efformandi (quod tamen Algebra facile aſſequitur) revocanda erit Pentagoni deſcriptio ad alium tractatum, ubi deſcriptio quoque tradetur ceterorum poligonorum quæ majori laterum numero compacta ſunt, & quæ ſine Algebræ ſubſidio geometrice deſcribi non poſſent.

Ex poligonis quæ quinque laterum numerum excedunt, & nonniſi ex algebraico calculo deſcribi poſſunt, ea excipi debent quæ ſex, 12, 24, 48, & 8, 16, 32, aut 64 latera habent, cum facillime ex elementari geometria deſcribantur, ut in calce hujus primæ partis oſtendetur.

XXV.

Ut agrorum dimenſionis ſermo redeat, cum agri ſepæ numero ii ſint qui per operationes ex præcedentibus methodis inſtitutas dimetiri non poſſint. *Fig.24.*

Fac ABCDE eſſe agrum aut circuitum quendam dimetiendum. Præcedentibus inhærendo dividendum eſſet ABCDE in triangula ABC, ACD, ADE, quæ deinde ductis perpendicularibus EF, CH, BG metiri deberent. Verum ſi in medio ABCDE propter aggerem, ſylvam, aut lacum lineæ quæ neceſſariæ ſunt duci non poterunt, quid erit agendum? quomodo hoc incommodum auferri poterit? Occurrit primo ſpatium aliquod eſſe ſeligendum, in quo facile deſcribi poſſint triangula æqualia, ac ſimilia triangulis ABC,

ACD &c. Nunc autem examinandum quomodo hæc triangula conficiantur.

XXVI.

Tribus trianguli lateribus cognitis triangulum alterum ipſi æquale deſcribere.

Fig.25. Primo detur obex in medio triangulo ABC, cujus latera cognoſcantur, & deſcribendum ſit in altero ſpatio triangulum ipſi æquale ac ſimile. Ducatur recta DE lateri AB æqualis, & fune, cujus longitudo ſit BC, & cujus alterutra extremitas maneat in E deſcribatur arcus IFG cujus radius ſit funis. Deinde altera fune æquali lateri AC, & alterutra extremitate manente in D deſcribatur arcus KFH qui primum ſecet in F, tum ductis rectis DF, & FE fiat triangulum DEF æquale ac ſimile triangulo ABC. Quod evidens eſt, nam cum latera DF, & EF occurrentia in F ſint æqualia lateribus AC, & BC conjunctis in C, & baſis DE ſit æqualis baſi AB, inclinatio rectarum DF, & EF ſuper DE eadem erit ac inclinatio rectarum AC, & BC ſuper AB. Si vero ſumantur rectæ D*f* E*f* ſubter DE, adhuc idem eſt triangulum ſed inverſum.

Fig.25. & 26.

XXVII.

Fig.27. Si autem Trianguli ABC duo tantum latera cognoſcantur v. gr. BA, BC, deſcribi non poterit alterum ipſi æquale ac ſimile. Nam

Nam dato latere DE æquali lateri BC, & DF æquali DA ignorabitur quænam ipſorum inclinatio eſſe deberet. Verum hæc auffertur difficultas ſi eadem conſtituatur inclinatio lateris DF ſuper DE; ac inclinatio lateris AB ſuper BC; ſive geometrice loquendo ſi angulus FDE æqualis fuit angulo ABC. Fog. 27. & 28.

XXVIII.

Modus deſcribendi angulum alteri æqualem.

Ut conficiatur angulus alteri æqualis ſit inſtrumentum *a b c* duabus regulis confectum quæ circum *b* agi poſſint. Hæ enim ſuper latera AB, & BC poſitæ angulum efficient æqualem angulo laterum AB, & BC. Quare ſic poſita regula *b c* ſuper baſim DE, ut eodem intervallo manente centrum *b* ſit in puncto D, regula *a b* oſtendet inclinationem rectæ DF, quæ cum recta DE efficiet angulum FDE æqualem angulo ABC. Sed recta DF ex hypotheſi ejuſdem eſt longitudinis ac recta BA; ergo tantum per puncta F & E ducenda remanet recta FE ut habeatur triangulum FED æquale ac ſimile triangulo ABC. Quæ praxis hoc evidens principium ſupponit: ex longitudine duorum laterum, & eorum inclinatione triangulum determinari: ſive, quod idem eſt, triangulum eſſe alteri æquale, cum duo eorum latera ſunt ſibi invicem æqualia, & æqualis eſt angulus hiſce lateribus comprehenſus.

XXIX.

Altera methodus deſcribendi angulum alteri æqualem.

Fig. 29. & 30. Poſſet etiam fieri angulus FDE æqualis angulo ABC ſequenti methodo.

Ex centro B quocumque intervallo B*a* deſcripto arcu *abc*, & ex centro B eodem intervallo deſcripto arcu *eif*, ſolum inquirendum erit punctum *f*, quod ita ſit in arcu *eif*, uti punctum *a* erit in arcu *cba*. Hoc autem facile invenietur ope rectæ *ac* quæ nuncupari ſolet chorda arcus *abc*.

Etenim ſi ex centro *e* intervallo æquali rectæ *ac* deſcribatur arcus *lfk*, in communi ſectione arcuum *eif*, & *lfk* erit punctum quæſitum *f*. Hinc per puncta D & *f* ducta recta D*f*E angulus FDE æqualis erit angulo ABC. Quod evidens eſt (art. XXVI.) cum triangula B*ac*, D*fe* ſint æqualia ac ſimilia.

XXX.

Fig. 27. & 28. Si efficiendum ſit triangulum FDE æquale triangulo ABC, cujus unum latus BC ex. gr. tantum metiri poſſit, adhibendi ſunt anguli ABC, & ACB. Etenim data recta DE æquali rectæ BC, ſi collocentur rectæ FD, & FE ut ſimul cum DE eoſdem angulos efficiant, qui inter rectas AB & AC una cum BC comprehenduntur, triangulum FDE ob harum rectarum concurſum æquale

& ſi-

& ſimile erit triangulo ABC. Principium quod hic ſupponitur adeo ſimplex eſt ut quævis demonſtratio ſupereſſe videatur.

XXXI.

Triangulum Iſoſceles eſt quod duo latera habet æqualia. Anguli vero inter hæc latera & baſim comprehenſi ſunt æquales.

Si ex tribus trianguli ABC lateribus una baſis BC metiri poſſit, & aliunde compertum ſit triangulum eſſe iſoſcelem, duo ſcilicet ipſius latera æqualia eſſe, ſat erit profecto ex angulis ABC, ACB unum metiri, cum alter ſit ipſi neceſſario æqualis. Quod facile intelligitur animadvertendo quid contingeret, ſi duo latera AB, AC trianguli ABC conſtituerentur ſuper rectas BD & CE additas baſi BC, & ſi deinde eorum extremitates conjungerentur in puncto A: tunc enim hæc duo latera ob eorum æqualitatem æquale ſpatium percurrerent; ergo ſimul juncta, æqualiter ſuper baſim BC eſſent inclinata; ergo angulus ABC æqualis eſſet angulo ACB. Fig. 31.

XXXII.

Ut agrorum dimenſionis ſermo revocetur, ex methodo præcedenti compertum erit dato interius quocumque obice, in alterum ſpatium facile traduci poſſe omnia triangula, in quæ ſpatium dimetiendum dividitur.

Sit ex. gr. dimetienda ſylva ABCDEFG. Fig. 32.

Conſtruatur triangulum quod ſit æquale triangulo A B C : quod præſtari poterit quin ad medium triangulum accedendum ſit, metiendo videlicet duo latera A B, B C, & eorum angulum C B A. Ex hoc triangulo innoteſcet angulus B C A, & longitudo lateris A C, atque ex dimenſione externi lateris D C latera D C, & C A in triangulo C A D invenientur. Angulus vero D C A innoteſcet de-
Fig. 32. & 33. ſcribendo angulum I K L æqualem angulo D C B, & angulum L K O æqualem angulo B C A : atque hinc reliquus angulus I K O æqualis erit quæſito angulo D C A.

Determinato triangulo A D C ex duobus lateribus D C, & C A, & eorum angulo D C A, cognoſcetur pariter triangulum D A G, & totius figuræ reliquum.

XXXIII.

In explicata methodo pro practica agrorum dimenſione in quibus lineæ rectæ duci non poſſunt plurimæ oriuntur difficultates; raro enim ſpatium accomodatum invenietur, ubi triangula deſcribi poſſint æqualia triangulis dimetientis : quo etiam invento, nimia tamen laterum longitudo operationes reddit difficiliores. Maximum enim incomodum, immo forſan impoſſibile eſſet ſuper datam rectam ex puncto vel quingentis perticis diſſito perpendicularem dimittere. Inveſtiganda eſt igitur methodus, qua hujuſmodi operationes aptius præſtari queant.

Hæc

Hæc autem facile menti occurrit. Deſcribatur figura *abcde* ſimilis majori metiendæ ABCDE, & *ab* ex. gr. latus minoris figuræ ſit centum digitorum ſi latus AB ſit centum perticarum, & latus *bc* quadraginta quinque digitorum ſi BC ſit quadraginta quinque perticarum. Tunc enim ſi extenſio minoris figuræ *abcde* ſit 60000. quadratorum digitorum, extenſio majoris ABCDE erit 60000. perticarum quadratarum. At vero inveſtigandum eſt primo in quo ſita ſit figurarum ſimilitudo. Fig. 34. & 35.

XXXIV.

In quo ſita ſit figurarum ſimilitudo.

Facile intelligitur ſimilitudinem figurarum ABCDE, *abcde* in eo eſſe ut anguli A, B, C, D, E majoris figuræ æquales ſint angulis *a*, *b*, *c*, *d*, *e* minoris, & latera *a*, *b*, *bc*, *cd* &c. minoris tot partes *p* contineant, quot in lateribus AB, BC, CD &c. majoris partes P continentur.

XXXV.

Hinc apud Geometras harum figurarum ſimilitudo in eo eſt ut latera AB, BC, CD &c. ſint proportionalia lateribus *ab*, *bc*, *cd* &c. ſive ut latus AB eodem modo contineat *ab*, ac BC continet *bc* &c. ſive ut AB ſit tantæ magnitudinis relate ad *ab*, ac BC relate ad *bc* &c. ſive etiam ut eadem ſit ra-

tio inter A B & *a b*, ac inter B C & *b c* &c. ſive tandem ut A B ſit ad *a b* quemadmodum B C eſt ad *b c* &c. Quæ variæ loquendi rationes ignorandæ non ſunt ut Geometrarum ſermo percipiatur.

XXXVI.

Modus deſcribendi figuram alteri ſimilem.

Habita figurarum ſimilitudine inquirendum eſt qua naturali methodo figura alteri ſimilis deſcribi poſſit. Qua de re concipiatur Delineator qui figuram alteri ſimilem & minorem velit exhibere. Primum latere *a b* exhibet baſim A B figuræ A B C D E, & ſic inclinat ſuper *a b* latera *a e*, & *b c*, quemadmodum A E & B C ſuper A B inclinantur efficiens ut longitudines laterum *a e*, & *b c* ſint ad *a b*, ſicut longitudines laterum A E, & B C ſunt ad A B; hoc eſt ſi A E ex. gr. eſt dimidium lateris A B deſcribit *a e* æquale dimidio lateris *a b*. Quod idem peragit in determinanda ratione longitudinis *b c* ad B C. Sic determinatis punctis *e* & *c* ducit duas rectas *e d*, & *c d*, quas ſuper *e a* & *c b* ita inclinat quemadmodum E D & C D inclinantur ſuper E A, & C B : deinde his rectis productis donec concurrant in *d* perficit figuram *a b c d e*.

XXXVII.

Si hæc conſtructio conſideretur perſpectum erit eam inniti tantum æqualitati angulorum E, A,

E, A, B, C, & *e*, *a*, *b*, *c*, & proportionalitati laterum EA, AB, BC ad *ea*, *ab*, *bc*, & ſic figuram perfici quin angulus *d* conſtitutus ſit æqualis angulo D, nec latera *ed*, *cd* proportionalia lateribus ED, CD. Quapropter dubitari poſſet an angulus *d* æqualis eſſet angulo D, & latera *ed*, *cd* proportionalia lateribus ED, CD, ideoque an figura *abcde* eſſet figuræ ABCDE perfecte ſimilis. Hoc autem dubium ſola experientia evaneſcet. Ceterum ſi vel leviter res perpendatur innoteſcet profecto ex relativa æqualitate quatuor angulorum E, A, B, C, & *e*, *a*, *b*, *c*, & ex proportione trium laterum EA, AB, BC ad *ea*, *ab*, *bc* oriri neceſſario æqualitatem angulorum, D, *d*, & proportionem laterum ED, CD, & *ed*, *cd*.

Interim ut hæc tollatur ſuſpicio oſtendendum eſt conditiones omnes quas figurarum ſimilitudo requirit ex ſe invicem neceſſario pendere: quod facile præſtabitur examinando triangula quæ figurarum omnium ſimpliciſſima ſunt, & in omnium conſtructione inveniuntur; hac enim contemplatione ducemur ad omnes figurarum ſimilium proprietates & uſus inveſtigandos.

XXXVIII.

Si duo anguli unius trianguli æquales ſint duobus alterius trianguli tertii quoque erunt æquales.

Fac ſuper baſim *ab* deſcribi triangulum *abc* *Fig. 36. Tab. 1.*

& 1. *abc* datis ſolum angulis *cab*, *cba* æqualiTab.2. bus angulis CAB, CBA trianguli ABC, tertius angulus *acb* erit æqualis tertio angulo ACB.

Nam ſi ita ſit triangulum *abc* ſuper triangulum ABC collocatum, ut *a* ſit ſuper A, *ab* ſuper AB, & *ac* ſuper AC, manifeſte *cb* erit parallela ad CB, quia latus *cb* productum nunquam occurrere poſſet in CB, quin hæ duæ rectæ inæqualiter eſſent ſuper AB inclinatæ, & conſequenter anguli *cba*, & CBA inæquales. Quod contra hypotheſim eſſet.

Sicuti ex æqualitate angulorum *cba*, & CBA ſequitur rectas *cb*, & CB eſſe parallelas, ſive æquediſtantes, ita ex hac æqualitate diſtantiæ ſequitur angulos A*cb*, ACB æquales eſſe. Quod erat demonſtrandum.

XXXIX.

Duo triangula, quorum anguli ſunt ſibi invicem æquales, habent latera proportionalia.

Oſtendendum modo latera duorum triangulorum *acb*, & ACB eoſdem angulos habentium eſſe proportionalia.

Ut noſtræ mentis ideæ certis limitibus firmentur, fac *ab* eſſe dimidium AB : oſtendendum erit *ac* eſſe quoque dimidium lateris AC, & *bc* lateris BC. Quare ſic collocato *acb* (Art. præced.) ut ſit etiam A*cb*, ſi ducatur *cg* parallela ad AB certum erit hanc rectam æqualem fore rectæ *b*B, ſive

A*b*,

A b, & *g* B æqualem rectæ *cb*. Sed datis angulis *cg* C, & C*cg* æqualibus angulis *ob* A, & *c* A *b*, triangulum C*cg* æquale erit triangulo *c* A *b* (Art. XXX.) : ergo latus C*c* æquale erit lateri A*c*, & C*g* æquale lateri *cb* ſive *g*B; ergo A*c* ſive *ac* dimidium erit lateris AC, & *cb* dimidium lateris CB. *Fig.* 36. *Tab.* 1. & 2. *Tab.* 2.

Si *ab* ter quater in AB contineretur facile quoque oſtenderetur toties *ac* in AC, & *cb* in CB contineri. Nam ex punctis diviſionis *b*, *f*, baſis AB ductis *bc*, *fb* ad BC parallelis collocari poſſent in AC tria quatuor &c. triangula, A*cb*, *cbg*, *b*C*i* æqualia triangulo *acb*.

Verum ſi *ab* non adæquate ſed bis e. g. cum dimidio in AB contineretur, oſtenderetur ququе *ac* in AC, & *bc* in BC bis cum dimidio contineri. Etenim poſitis in AC per parallelas *bc*, *fb* duobus triangulis A*cb*, *cbg* triangulo *acb* æqualibus, adhuc inter duas parallelas *bf* & CB. collocari poſſet triangulum C*bi*, cujus latera eſſent dimidium laterum trianguli *c* A *b*. Quod evidens eſt cum ex hypotheſi *f*B eſſet dimidium lateris A*b*, & baſis *bi* trianguli C*bi* æqualis eſſet baſi *f*B ob parallelas *bf* & CB. Ergo univerſim duo triangula ABC, *abc* eoſdem angulos habentia & vocata ſimilia, habent latera proportionalia, ſive quod idem eſt, latera AB, BC, AC unius trianguli ABC continent tot partes P quot in lateribus *ab*, *bc*, *ac* alterius trianguli *abc* partes *p* continentur. P enim eſt pes aut pertica *Fig.* 36. *Tab.* 1. & 3. *Tab.* 2.

ca ſive univerſim Scala qua triangulum A B C, & *p* qua triangulum *a b c* fuere conſtructa.

XL.

Ex demonſtrata propoſitione oritur ſolutio ſequentis Problematis, quod practice maximæ erit utilitatis.

Rectam dividere in quemlibet numerum partium æqualium.

Dividenda ſit quælibet recta in datum numerum partium æqualium. Hoc profecto pertentando præſtari poſſet, at numquam ſatis tute, ut geometrica fert demonſtratio.

Fig. 2. Tab. 2. Sit ex. gr. dividenda recta A B in tres æquales partes. Ducatur primo recta indefinita A C, quæ cum A B quemcumque angulum efficiat. Deinde acceptis in hac recta quocumque Circini intervallo tribus æqualibus partibus A *c*, *c b*, *b* C, ducatur recta C B, cui ducantur parallelæ *c b*, *b f*. Tum recta A B ſecta in punctis *b* & *f*, in tres æquales partes erit diviſa. Quod evidens eſt ex articulo præcedenti.

XLI.

Quid ſit quarta proportionalis tribus rectis, & quomodo inveniatur.

Si qua recta dividenda ſit in partes inadæquatas, ut bis cum dimidio, ſive ter cum quar-

quarta parte; aut univerſim ſi recta A B ita ſit dividenda in puncto *b* ut A B ſit ad A *b* ſicut N O eſt ad M Q, conſtat ſolutionem etiam hujus problematis ex articulo XXXIX. pendere, hoc eſt ex puncto A rectam quamcumque ducendam eſſe, & acceptis in ipſa partibus A *c* & A C æqualibus ad M Q & N O deſcribendam eſſe *c b* parallelam ad C B. Tunc enim punctum *b* erit punctum quæſitum. Fig. 3. Tab. 2.

Hoc problema a Geometris ſic afferri ſolet: Tribus latis rectis N O, M Q, A B quartam proportionalem invenire.

XLII.

Altitudines triangulorum ſimilium lateribus ſunt proportionales.

Datis duobus ſimilibus triangulis A B C, *a b c* evidens eſt non ſolum eorum latera eſſe proportionalia, verum & perpendiculares C F, *c f* ex verticibus C, *c* ſuper baſes A B, *a b* demiſſas eamdem habere proportionem ac latera; quod ita facile ex præcedentibus oſtenditur ut hac in re diutius immorari ſuperſit. Fig. 4. 5. Tab. 2.

XLIII.

Quod vero pertinet ad ſimilia triangula A B C, *a b c* compertum eſt aream primi continere tot quadrata X menſura P confecta, quot quadrata *x* menſura *p* conſtructa in area alterius continentur. Nam ſicuti in C F

&

& A B, art. præc., tot ſunt partes P, quot in *c f* & *a b* continentur partes *p*, ita dimenſio trianguli A B C, ſcilicet dimidium producti ex C F in A B art. XIV., idem erit numerus ac dimidium producti ex *c f* in *a b*, quod eſt dimenſio trianguli *a b c*: hoc tamen diſcrimine ut quadrata X conſtituant productum ex C F in A B per partes P numeratum, & quadrata *x* productum efficiant ex *c f* in *a b* ſupputatum per partes *p*.

XLIV.

Areæ Triangulorum ſimilium ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum.

Ex his quæ de triangulorum ſimilium dimenſione dicta ſunt, oſtenditur propoſitio quæ in Geometriæ elementis ſic ſolet enunciari: Triangula ſimilia A B C, *a b c* ſunt inter ſe ut quadrata A B D E, *a b d e* laterum homologorum A B, *a b*.

Hoc ex præcedenti articulo neceſſario ſequitur. Etenim datis tot X in quadrato A B D E, quot *x* in quadrato *a b d e* continentur, manifeſtum eſt duos numeros quadratorum X ex quibus intelligitur ratio trianguli A B C ad quadratum A B D E eoſdem eſſe ac numeros quadratorum *x* rationem trianguli *a b c* ad quadratum *a b d e* exprimentes; ſive quod idem eſt, triangulum A B C eſſe ad quadratum A B D E, ut triangulum *a b c* ad quadratum *a b d e*.

Hinc

Hinc ſequitur, ſi latus AB ex. gr. ſit duplum lateris *ab*, triangulum ACB eſſe quadruplum trianguli *acb*, & ſi AB ſit triplum lateris *ab*, triangulum ACB novem majus eſſe triangulo *acb* &c. Nam latus AB eſſe non poteſt duplum lateris *ab* quin quadratum ABDE ſit quadruplum quadrati *abde* &c.

XLV.

Proprietates figurarum ſimilium ex proprietatibus triangulorum ſimilium deductæ.

Ut ex triangulis ſimilibus ad ceteras figuras progrediatur, fac cuique triangulo ſimilis ABD, *abd* addi duo triangula ABE & BDC, *ade* & *bdc*, quorum prima ceteris ſint ſimilia. Innoteſcet in totis figuris ABCDE, *abcde*. *Fig. 34. 35. Tab. I.*

Primo angulos A, B, C, D, E eoſdem eſſe ac angulos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; ſinguli enim efficient aut angulos triangulorum ſimilium ſibi invicem reſpondentes, aut ex reſpondentibus compoſitos.

Innoteſcet ſecundo rationem laterum homologorum aut ſibi invicem reſpondentium DE, *de*, BC, *bc* &c. figurarum ſimilium ABCDE, *abcde* eamdem neceſſario eſſe; hoc eſt ſi P ex. gr. toties contineatur in AB, quoties *p* eſt in *ab*, P & *p* æqualiter contineri in quibuſcumque lateribus homologis DE, & *de*. Nam proter ſimilitudinem triangulorum ABD, *abd* ita erit P in AD, ut *p* in *ad*.

Ergo

Ergo ſumptis his lateribus ut baſibus triangulorum ſimilium ADE, *ade*, idem erit numerus partium P in latere DE, ac numerus partium *p* in *de*.

Tertio conſtabit etiam ſi in his duabus figuris ducantur rectæ ſibi reſpondentes ut CE, *ce*, ſive perpendiculares DF, *df*, &c. hujuſmodi rectas eamdem habere inter ſe rationem, ac latera homologa.

Igitur figuræ ABCDE, *abcde* erunt perfecte ſimiles.

XLVI.

Deſcripta figura *abcde* perfecte ſimili figuræ ABCDE, ſi altera perfecte æqualis figuræ *abcde*, & conſequenter ſimilis figuræ AB CDE deſcribi velit, non omnia latera, neque anguli omnes figuræ *abcde* metiendi ſunt, ſed ſumptis tantum ex. gr. tribus lateribus *ab*, *ea*, *bc*, & quatuor angulis *e*, *a*, *b*, *c* deſcribi poteſt eadem figura *abcde* ſimilis figuræ AB CDE. Atque hinc profecto adæquate oſtenditur quod ſolummodo præſuppoſitum fuit Art. XXXVII. Ulterius autem procedi poteſt; diverſe enim componuntur quantitates angulorum & rectarum quæ neceſſario in quacumque figura metiri debent, ut altera ipſi proportionalis deſcribatur. Attamen hæc profuſiori methodo pertractando Lectoris mens ultra fatigaretur.

XLVII.

Areæ figurarum ſimilium ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum.

Simili ratione ac in Articulo XLIII. oſtenditur numerum quadratorum X in figura AB CDE eumdem eſſe ac numerum quadratorum *x* in *abcde*, & ſic areas figurarum ſimilium eſſe inter ſe ut quadrata laterum homologorum.

XLVIII.

Figuræ ſimiles non differunt inter ſe niſi ex ſcalis quibus confectæ ſunt.

Quod de figuris ſimilibus dictum fuit ad hoc unum principium revocari poteſt: figuras ſimiles inter ſe non differre niſi ex ſcalis quibus confectæ ſunt.

XLIX.

Ut interim melius appareat triangulorum ſimilium & reductionum uſus ad habendam agrorum dimenſionem in quibus commode peragi non poteſt, fac ABCDEF eſſe circuitum vivarii aut lacus &c. cujus extenſio ſit determinanda. Primum inquiratur quot perticæ in uno latere ex. gr. FE contineantur. Deinde ſumpta quacumque ſcala deſcribatur ſuper papiro recta *fe* æqualis tot ſcalæ partibus quot *Fig. 6. 7. Tab. 2.*

perticæ in FE continentur. Poſtea effectis angulis *def*, *dfe* æqualibus angulis DEF, DFE, habebitur triangulum *edf*: in hoc ducatur *eg* perpendicularis ad *df*; & deinde rectis *df*, & *eg* ſcala metitis, concludi poterit tot reductas partes in his rectis contineri, quot perticas continent DF, & EG: & tandem multiplicato DF in dimidium lateris EG habebitur quantitas trianguli EDF; eodemque modo metitis ceteris triangulis DCF, BCF; ABF area totius figuræ determinabitur.

L.

Modus dimetiendi diſtantiam loci inacceſſibilis.

Sæpe numero contingit ut quis metiri debeat diſtantiam alicujus loci quo accedere nequeat a loco F ubi moratur. Problema novum eſt, cujus ſolutio data eſt articulo præcedenti. Etenim quoniam ſola ſimilitudine triangulorum *def*, & DEF metitum fuit DF, evidens eſt metita quacumque baſi EF, & ex punctis F & E cognito puncto D, problema eſſe reſolutum; hoc eſt cognoſci diſtantiam FD.

LI.

Fig. 8. Tab. 2. Uſus particularium inſtrumentorum ut *b* A *c* quod (Art. XXVIII.) ex duabus regulis compoſitum eſt conjunctis in puncto A circum quod agi poſſunt, pluribus erroribus obnoxium videtur. Modo enim anguli aperitio in tranſlatione

ſpſius

ipſius inſtrumenti aliquantum mutabitur. Modo forma quæ inſtrumento danda eſt ut ejus uſus facilior reddatur, impediet ne plano applicari poſſit ubi reductio eſt facienda.

His addendum quemcumque angulum B A C hoc modo ſumptum requirere ut iterum inſtrumentum ſuper papirum transferatur, nec aliter duos angulos comparari poſſe quam unum ſuper alterum collocando, quin tamen hujuſmodi methodo neque accurata eorum ratio, neque eorum magnitudo abſoluta dignoſci poſſit.

LII.

Anguli menſura eſt arcus Circuli ab anguli lateribus comprehenſus.

Neceſſario igitur inquirenda angulorum aptior ac determinata menſura, ſicuti in tractatione longitudinum præſtitum eſt. Hæc autem facile invenitur. Nam poſita A *b* immobili, ſi ipſi applicetur latus A *c* quod deinde agatur circum A, manifeſte patet, poſito calamo vel ſtilo ex hæmatite uſto confecto in extremitate *c* regulæ mobilis A *c*, quo ſenſibilis reddatur via puncti *c*, patet inquam hujuſmodi viam quæ arcus Circuli erit, oſtendere anguli menſuram ex quacumque particulari aperitione laterum A *b*, A *c*: hoc eſt propter Circuli peripheriam cuique aperitioni duplæ, triplæ, aut quadruplæ aperitionis *c* A *b* neceſſario reſpondere arcum duplum, triplum, aut quadruplum arcus *c b*. *Fig. 9. Tab. 2.*

Fac igitur peripheriam *bcdfg* ex integra revolutione puncti *c* deſcriptam dividi in quemcumque numerum partium æqualium, numerus partium quas continebit arcus a rectis A *c*, A *b* comprehenſus, metietur perfecte harum linearum aperitionem, ſive earum angulum *c* A *b*.

LIII.

Circulus dividitur in 360. gradus: quiſque gradus in 60. minuta &c.

Geometræ dividunt Circulum in 360. partes, quas gradus appellant, quemcumque gradum in 60. minuta, & quodcumque minutum in 60. ſecunda &c. Ita angulus *b* A *c* ex. gr. habebit 70. gradus & 20. minuta, ſi arcus *b c* ejus menſura continebit 70. gradus ex 360. circuli gradibus, & partes 20. ex unius gradus partibus ſexageſimis.

LIV.

Angulus rectus habet 90. gradus, & ejus latera ſunt ſibi invicem perpendicularia.

Fig. 10. Tab. 2. Hinc ſequitur angulum C A B habentem 90. gradus, & communiter vocatum rectum, eum eſſe, cujus latera A C, & A B comprehendunt quadrantem Peripheriæ B C & ſibi invicem ſunt perpendicularia.

LV.

LV.

Angulus acutus eſt minor recto.

Angulus minor angulo recto, ſive minus continens quam 90. gradus vocatur acutus: ut anguli CAB, FAG, EAG. Fig. 11. Tab. 2.

LVI.

Angulus obtuſus major eſt angulo recto.

Contra angulus obtuſus vocatur qui plus quam nonaginta continet gradus, ut FAB.

LVII.

Summa angulorum qui ab una recta ſuper quamcumque rectam efficiuntur, & quorum omnium idem eſt vertex, æqualis eſt gradibus 180.

Evidens eſt omnes angulos ut GAF, FAE, EAC, CAB, qui ab una recta ſuper rectam GB effici poſſunt, & quorum omnium idem eſt vertex A ſimul ſumptos æquales eſſe gradibus 180., ſive duobus angulis rectis ex ſemiperipheria metitis.

LVIII.

Omnes anguli qui circa idem punctum conſtitui poſſunt, æquales ſunt ſimul ſumpti quatuor rectis.

Pariter ſumma omnium angulorum EAF, FAB, BAC, CAD, DAE qui circa punctum Fig. 12. Tab. 2.

A communem eorum verticem effici poſſunt æqualis eſt gradibus 360., ſive quatuor angulis rectis metitis ex integra peripheria B C D E F.

LIX.

Uſus inſtrumenti quod ſemicirculus vocatur, ad dignoſcendam anguli magnitudinem.

Cum oſtenſum ſit partes circuli eſſe angulorum menſuram, nunc inveſtigandum eſt quomodo determinentur gradus in angulo dimetiendo contenti.

Fig.13. Tab.2. Adhibetur inſtrumentum I, quod ſemicirculus vocatur, & componitur ex duabus æqualibus regulis ut E A C, D A B in puncto A decuſſatis, quarum una circum A moveri poteſt, altera D B immobilis permanet, & eſt diameter ſemicirculi D C B in 180. gradus diviſi &c.

Si itaque inveſtigandus angulus quem intercipiunt duæ lineæ rectæ ductæ ex loco inveſtigantis ad duo quæcumque objecta F, G, ita collocetur regula immobilis D A B ut oculus ſitus in D per duo foramina D & B attingat objectum F. Deinde immobili manente inſtrumento, moveatur regula E C donec oculus ſitus in E per foramina E & C attingat alterum objectum G. Et tunc hæc mobilis regula indicabit in ſemicirculo in gradus diviſo, quot gradus aut minuta in propoſito angulo G A F contineantur.

LX.

LX.

Uſus inſtrumenti quo efficitur angulus qui datum numerum graduum contineat.

Si in papyro angulus deſcribendus ſit qui datum numerum graduum contineat, adhibetur inſtrumentum K in 180. gradus diviſum. Et poſito centro A ſuper verticem anguli deſcribendi & recta AB ſuper rectam AG quæ ſumitur ut unum anguli latus, a puncto C indicantur gradus quos angulus propoſitus debet continere. Deinde ex hoc puncto ad centrum A ducta linea ACO, habetur angulus OAG continens datum numerum graduum. *Fig. 14. Tab. 2.*

LXI.

Si itaque ſuper baſim FG in papyro deſcribendum ſit triangulum FGH ſimile triangulo ABC in agro conſtituto, ſemicirculi ope dignoſcatur quot gradus quique angulus CAB, CBA contineat. Deinde fient anguli HFG, & HGF æquales angulis CAB, & CBA, & tunc habebitur triangulum FGH ſimile triangulo ABC, cum punctum H, in quod latera FH, GH concurrunt, & angulus FHG neceſſario ex operatione determinentur. *Fig. 15. & 16. Tab. 2.*

LXII.

Sicuti ex dictis practice plurimi intereſt ut anguli accurate dimetiantur, non ſolum per-

fectioribus inſtrumentis hoc præſtetur neceſſe eſt, ſed etiam invenienda eſt methodus, qua eorum dimenſio probari poſſit, & corrigi ſi oporteat. Hæc autem methodus facilis eſt & ſimplex. Sit denuo triangulum A B C. Compertum eſt magnitudinem anguli C oriri ex magnitudine angulorum A, & B. Etenim auctis hiſce angulis ſive imminutis, inclinatio linearum A C, B C mutaretur, & conſequenter earum angulus C. Sed ſi hic angulus pendet a magnitudine angulorum A, & B, numerus graduum quos anguli A, & B continent, determinabit numerum graduum qui ab angulo C contineri debent. Ergo ex hujuſcemodi methodo operationes probari poterunt, quibus anguli A, & B fuere determinati. Certum enim erit angulos A, & B exacte metitos eſſe, ſi metito deinde angulo C numerus graduum in ipſo inveniatur qui ad eum pro magnitudine angulorum A, & B pertinebit.

Ut intelligatur quomodo ex magnitudine angulorum A, & B deduci poſſit magnitudo anguli C, inveſtigetur quid ei contingeret ſi lineæ A C, B C aut ſibi invicem accederent, aut diſcederent a ſe invicem. Fac ex. gr. B C circumeundo punctum B diſcedere ab A B ut accedat ad B E, evidens eſt angulum B aperiri dum movetur B C, & contra angulum C magis magiſque contrahi. Ex quo cognoſci poterit in hac hypotheſi imminutionem anguli C æqualem eſſe augmento anguli B, & ſic ſummam trium angulorum A, B, C eamdem ſemper eſſe quacumque data inclinatione

Fig. 17. Tab. 2.

ne

linearum A C, B C ſuper lineam A E.

LXIII.

Anguli alterni ſunt anguli oppoſiti qui conficiuntur utrinque a recta linea ſuper duas parallelas ducta: & ſunt æquales.

Nam ſi ducatur I D parallela ad A C, intelligetur primo Angulos A C B, & C B D, qui vocantur alterni eſſe æquales. Quod evidens eſt: cum enim rectæ A C, & I B ſint paralleIæ, erunt æqualiter inclinatæ ſuper C B O, & ideo angulus I B O æqualis erit angulo A C B; ſed angulus I B O æqualis eſt angulo C B D, cum linea I D in neutram partem ſuper C O; ergo angulus D B C æqualis angulo I B O æquabit angulum alternum A C B. *Fig. 18. Tab. 2.*

LXIV.

Summa angulorum cujuſcumque trianguli eſt æqualis duobus rectis.

Intelligetur deinde angulum C A E æqualem eſſe angulo D B E propter parallelas C A & D B. Igitur ſi tres anguli hujus trianguli ſimul uniantur, & eorum vertices conjungantur in puncto B, perſpectum erit tres angulos D B E, C B D, & C B A qui æquant tres angulos C A B, A C B, C B A æquales eſſe duobus angulis rectis (Art. LVII.) Et ſicuti de quocumque triangulo hoc dici poterit, certiſſima erit hæc generalis proprietas: Summam trium angulorum cujuſcumque trianguli æqua-

lem

lem eſſe duobus rectis, ſive quod idem eſt gradibus 180.

LXV.

Igitur, ut valor tertii anguli cujuſcumque trianguli deducatur, duobus aliis metitis auferatur ex gradibus 180. numerus graduum quos duo anguli ſimul ſumpti continebunt. Ex hac proprietate methodus eruitur probandi in triangulo angulorum dimenſiones, & quo magis proficietur, majores intelligentur utilitates. Modo conſequentiæ tantum proximiores deducentur.

LXVI.

In triangulo unus tantum angulus rectus eſſe poteſt, ac multo magis unus tantum obtuſus.

LXVII.

Si in triangulo unus angulus rectus eſt, ſumma ceterorum æqualis erit angulo recto.

Hæ duæ propoſitiones ita manifeſtæ ſunt ut demonſtratione non egeant.

LXVIII.

Omnis trianguli quivis angulus externus æqualis eſt duobus internis oppoſitis.

Si unum latus A B ex. gr. trianguli A B C producatur, angulus externus C B E æqualis erit duobus angulis internis oppoſitis B C A, C A B. Nam ſi angulo C B A addantur aut angu-

anguli BCA, & CAB, aut angulus CBE, ſumma æqualis erit gradibus 180., ſive duobus angulis rectis (Art. LXIV.).

LXIX.

Cognito uno angulo trianguli Iſoſcelis ceteri duo cognoſcuntur.

Angulus cognitus, ſit angulus ad verticem A. Si numerus graduum quos angulus A continebit auferatur a dimenſione trium angulorum, hoc eſt a gradibus 180., certum eſt dimidium ſummæ quæ reliqua erit, eſſe menſuram cujuſque ad baſim angli B, & C. Fig. 19. Tab. 2.

Si vero angulus cognitus ſit angulus ad baſim B, ſive C; duplo ipſius valoris ablato a gradibus 180., quod remanet erit menſura anguli ad verticem A.

LXX.

In triangulo æquilatero quivis angulus continet gradus 60.

Sicuti triangulum æquilaterum non eſt niſi triangulum Iſoſceles, cujus baſis eſſe poteſt quodcumque ſuorum laterum, evidens eſt tres ipſius angulos neceſſario æquales eſſe, & unumquodque continere tertiam partem graduum 180., ſive gradus 60.

LXXI.

Deſcriptio Hexagoni.

Hinc facile eruitur deſcriptio Hexagoni ſive poligoni ſex laterum, quod Articulo XXIV. promiſſum fuit.

Nam ut linea inveniatur quæ peripheriam dividat in ſex æquales partes, inveniri debet linea quæ ſit chorda arcus graduum *6*o., qui ſexta pars ſunt graduum 3*6*o., quos tota con-
*Fig.*20. tinet peripheria. Igitur ſi hæc chorda ſit ex.
*Tab.*2. gr. A B, ductis a centro I ad extremitates A & B radiis A I, & I B, angulus A I B continebit gradus *6*o,, & triangulum A I B erit iſoſceles quia duo latera A I, & I B ſunt æqualia. Ergo ſi angulus ad verticem contineat *6*o. gradus, quiſque angulus continebit & ipſe *6*o. gradus, dimidium ſcilicet numeri 120. Ergo (Art. LXX.) triangulum A I B erit æquilaterum; & A B æquabit circuli radium. Quare ut Hexagonum deſcribatur, & circini intervallo quod æquale ſit circuli radio, in ſex partes Peripheria dividi debet, eo tunc ſex latera Hexagoni conficientur.

LXXII.

Ex dimidio anguli ad centrum Hexagoni eruitur angulus ad centrum Duodecagoni.

Deſcripto Hexagono A B C D E F, facile deſcribetur Duodecagonum ſive poligonum habens duodecim latera.

Nam

Nam diviſo arcu A K B, ſive angulo A I B in duas æquales partes, A K chorda dimidii arcus A K B erit duodecagoni latus.

LXXIII.

Datum angulum æqualiter dividere.

Arcus autem AKB in duos æquales arcus A K, & K B dividetur eodem modo, ac ſi chorda A B dividenda eſſet in duas æquales partes: hoc eſt ex punctis A, & B ut centris quocumque intervallo deſcribantur arcus M L N, O L P, & a puncto L ſectione duorum arcuum ducatur per centrum I linea L I. Hæc dividet & arcum A K B, & chordam A B.

LXXIV.

Deſcriptio poligonorum 24., 48. *&c. laterum.*

Si ex præcedenti methodo arcus A K in duos æquales arcus dividatur, chorda alterutrius erit latus poligoni 24. laterum. Eodem modo deſcribentur poligona laterum 48., *96.*, 192. &c.

LXXV.

Deſcriptio Octogoni, & Poligonorum, quæ 16., 32. *&c. latera habeant.*

Ut deſcribatur Octogonum, poligonum ſcilicet octo laterum, deſcribatur quadratum in cir-

circulo: quod fiet ſi ducentur duo diametri A I B, & C I E ita ſe mutuo ſecantes, ut angulos rectos efficiant; & jungantur eorum extremitates rectis A C, C B, B E, A E.

Nam propter circuli regularitatem & æqualitatem quatuor angulorum quos efficiunt perpendiculares A I B, C I E, quatuor latera A C, C B, B E, E A erunt neceſſario æqualia, & æqualiter ſibi invicem poſita. Quod ſolius quadrati proprium eſt.

Si quadrato ita deſcripto, arcus C K B, B L E &c. in duas æquales partes ex prejacta methodo dividantur, habebitur Octogonum CKBLEMAN.

Si eodem modo dividatur quivis arcus C K, K B &c. in 2., 4., aut 8. &c. æquales partes, habebuntur poligona laterum 16., 32., 64. &c.

Finis primæ partis.

D. CRAI-

D. CLAIRAUT ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS SECUNDA.

De geometrica comparatione figurarum rectilinearum.

SI quod de agris dimetiendis dictum fuit ſerio conſideretur, cognoſci profecto debet diverſas poſitiones linearum per ſe ipſas quammaxime eſſe animadvertendas, nulla vel habita ratione utilitatis quam practice afferre poſſent. Et illud quoque ſentiendum non aliunde ulteriora primorum Geometrarum inventa ortum duxiſſe quam ab hiſce animadverſionibus; non enim neceſſitate ſolum, ſed cupiditate etiam diſcendi inveſtigationes ſæpe numero excitantur.

Verum & maxime ad Geometriæ profectum contuliſſe compertum eſt naturalem quamdam præciſionis voluptatem, ſine qua intellectus nunquam expletur.

Ita cum in metiendis figuris perſpicuum ſit ſca-

ſcalis & ſemicirculis non adæquate linearum aut angulorum valorem ſæpe ſæpius dimetiri, methodus inveſtigata fuit quæ horum inſtrumentorum defectum ſuppleret.

Hic denuo figuræ rectilineæ adhibendæ erunt: verum in earum rationibus inveniendis regulæ tantum & circini erit uſus.

Sæpe numero neceſſe eſt ut in eamdem figuram plures ipſi ſimiles coadunentur, ſive ut illa in alias ſimiles diſſolvatur. Quod in rectangulis experiri poteſt, quoniam omnes rectilineæ figuræ compagines ſunt triangulorum, & horum quodlibet dimidium eſt rectanguli ſuper eadem baſi eademque altitudine conſtituti.

I.

Duo rectangula quæ eamdem habent altitudinem ſunt in eadem ratione ac eorum baſes.

Ut rectangula ſibi invicem comparentur, neceſſaria eſt methodus commutandi quodcumque rectangulum in aliud quod eamdem quidem ſuperficiem, diverſam vero habeat altitudinem. Cum enim duo rectangula fuerint in alia duo ejuſdem altitudinis commutata, nullum inter ipſa aderit diſcrimen niſi ex eorum baſibus. Majus illud erit, cujus baſis major, & ita continebit rectangulum minus, ut illius baſis minorem baſim continebit. Quod ita enunciari ſolet: Duo rectangula quæ eamdem habeant altitudinem ſunt in eadem ratione ac eorum baſes.

II.

II.

Ut hæc duo rectangula ſimul addantur, unum prope aliud collocandum eſt.

III.

Neque difficilius a majori rectangulum minus demetur.

IV.

Ut dividatur rectangulum in datum numerum rectangulorum æqualium, ſecetur baſis in datum numerum partium æqualium, & ſuper diviſionis puncta perpendiculares excitentur.

V.

Modus rectangulum commutandi in aliud datæ altitudinis.

Commutandum ſit rectangulum ABCD in aliud BFEG, quod eamdem habeat ſuperficiem, & cujus altitudo ſit BF. Quoniam valor rectanguli eſt productum ex altitudine in baſim, debebit rectangulum quæſitum BFEG cujus altitudo erit major quam BC, habere, baſim minorem quam AB; hoc eſt ſi BF ex. gr. ſit dupla BC, BG debebit eſſe dimidium AB: ſi BF ſit tripla BC, BG quoque erit tertia pars AB. *Fig. 1. Tab. 3.*

Pariter ſi BF non adæquate, ſed bis ex. gr. cum tertia parte contineat BC, Rectangulum BFEG non erit æquale rectangulo ABCD,

ABCD, quin ipſius baſis BG bis cum tertia parte in baſi AB contineatur. Et univerſim facile intelligitur, ut duo rectangula ABCD, BFEG æqualia ſint, neceſſe eſſe ut baſis BG unius rectanguli in alterius baſi AB eodem modo contineatur, ac altitudo BC in altitudine BF.

Erit igitur ita dividenda recta AB, ut AB ſit ad GB ſicuti BF eſt ad BC; quod fiet (1. Part. Art. XLI.) ducendo rectam FA, & ex dato puncto C parallelam CG.

VI.

Altera methodus rectangulum commutandi in aliud, cujus data ſit altitudo.

Ut rectangulum ABCD in aliud BFEG commutetur quod habeat datam altitudinem BF, altera adeſt methodus licet minus naturalis, facilior tamen. Producatur AD donec concurrat in I cum recta FEI quæ ducta ex puncto F ſit parallela ad AB. Deinde ducatur Diagonalis BI, & per punctum O ubi concurret cum DC, ducatur recta GOE parallela ad FB; tunc rectangulum BFEG erit æquale rectangulo ABCD.

Fig. 2. Tab. 3.

Ad hoc demonſtrandum ſat erit oſtendere rectangulum ADOG futurum æquale rectangulo EOCF, ſi ex duobus rectangulis ABCD, BFEG communis pars OCBG auferatur.

Jam vero poſita æqualitate duorum triangulo-

gulorum I B F, I B A, ſi ex his triangulis quantitates æquales auferantur, quæ remanent erunt æqualia. Sed triangulum I A B evadet rectangulum A D O G, ſi ab ipſo duo triangula I D O, O G B auferantur: & pariter triangulum I B F evadet rectangulum E O C F, ſi ab ipſo auferantur triangula I E O, O B C duobus primis æqualia. Ergo quæ remanent, duo ſcilicet rectangula A D O G, E O C F erunt inter ſe æqualia ſicuti etiam rectangula A B C D, B F E G.

VII.

Demonſtratur, poſita duorum rectangulorum æqualitate, baſim primi eſſe ad baſim alterius, ut hujus altitudo ad altitudinem primi.

Ex hac altera metodo rectangulum commutandi confirmatur principium, quod & prima methodus ſupponit, & ſimplici tantum inductioni innixum videbatur: Data videlicet æqualitate duorum rectangulorum A B C D, B F E G, neceſſario A B eſſe ad B G ut B F ad B C, quod ex art. antecedenti oſtendi poteſt.

Cum enim triangula I A B, & O G B ſint ſimilia, baſis A B majoris erit ad baſim G B minoris ut altitudo I A ad altitudinem O G, ſive ut B F ad B C ipſis æquales. Igitur ut in Articulo V. A B erit ad G B, ut B F ad B C.

VIII.

Ex propoſita methodo qua demonſtratur ex

æqualitate duorum rectangulorum ABCD, BFEG ſequi altitudinem BF eſſe ad altitudinem BC ut baſis AB ad baſim BG; oſtenderetur pariter, datis quatuor rectis BF, BC, AB, BG quarum prima ſit ad ſecundam ut tertia ad quartam, rectangulum cujus altitudo & baſis ſit prima & quarta, æquale eſſe rectangulo cujus altitudo & baſis ſit ſecunda & tertia.

IX.

Quatuor quantitates, ſicuti de lineis præcedentibus BF, BC, AB, BG dictum eſt, quarum prima ſit ad ſecundam, ut tertia ad quartam, proportionales dicuntur, ſeu proportionem conficere. Ita *6.*, *9.*, 18., 27. ſunt numeri proportionales, quia *6.* eodem modo in *9.* continetur, ac 18. in 27. contineatur. Quod idem dicendum de numeris 15., 25., 75., 125. &c.

X.

Ex quatuor proportionalibus prima & quarta vocantur termini extremi, ſive ſolum extremi, ſecunda vero & tertia termini medii, ſive ſolum medii.

Ex hiſce definitionibus compertum eſt propoſitiones Articuli VII., & VIII. ſic eſſe enunciandas.

XI.

Si quatuor quantitates ſint proportionales, productum extremorum eſt æquale producto mediorum.

XII.

XII.

Si datis quatuor quantitatibus productum extremorum ſit æquale producto mediorum, quantitates illæ erunt proportionales.

XIII.

Regula aurea, ſive modus inveniendi quartum proportionis terminum, datis tribus primis.

Duo præcedentes articuli ob maximum eorum uſum opportune ſunt animadvertendi. Ex ipſis inter cetera deducitur demonſtratio regulæ quæ aritmetice aurea appellatur. Ut hujus regulæ idea aliqua habeatur, ſit exemplum: Exemplo enim omnia facilius explicantur.

Fac 24. opifices triginta operis perticas dato tempore confeciſſe, quæritur quot perticas 64. opifices æquali tempore ſint confecturi.

Ut hæc quæſtio reſolvatur inveniendus eſt numerus qui ſit ad 64., ut 30. ad 24. Ex dictis hic numerus erit, cujus productum in 24. æquabit productum ex 30. in 64.; ſed productum ex 30. in 64. eſt 1920.; ergo numerus quæſitus ille erit, ex cujus multiplicatione in 24. habebitur 1920. Ex Aritmeticæ autem operationibus facile innoteſcit numerum quæſitum neceſſario eſſe quotientem numeri 1920. diviſi per 24.; hoc eſt 80.

Univerſim datis tribus terminis proportionalibus, ut quartus inveniatur, accipiatur pro-

ductum ex ſecundo & tertio, & hoc productum per primum proportionis terminum dividatur.

XIV.

Ex prædicto ſimplici exemplo neceſſitas antecedentis methodi haud ſatis forſitan dignoſcitur: ſola quippe naturali ratione numerus quæſitus inveniretur. Cum enim 30. quadrante ſuperet 24., numerus quæſitus ſuperare debebit quarta ſui parte 64.; ex quo habetur 80. Verum ſæpe ſæpius longum nimis ac diuturnum eſſet duorum primorum terminorum rationem invenire.

Ex. gr. inveniendus ſit quartus terminus proportionalis his tribus 259., 407., 483.

Ut per methodum præcedentem inveniatur, multiplicetur 483. in 407., & dividatur productum 196. 581. per 259. Ex hac diviſione habebitur 759. quartus terminus quæſitus.

Quævis alia fuiſſet ſuſcepta via, nonniſi pertentando hujuſmodi terminus inveniretur. Equidem dignoſci ex. gr. poſſet numerum 148. exceſſum numeri 407. ſuper 259. continere quatuor ex ſeptem partibus numeri 259., atque ita numerum 276. continentem quatuor ex ſeptem partibus numeri 483., huic eidem numero 483. eſſe addendum. Verum univerſalitas ex certitudo methodi præcedentis incommodum arcet ceteras vias inveſtigandi, quæ frequentiſſime forent inutiles.

XV.

XV.

Si duo quadrata addenda ſint, eodem addentur modo, ac duo rectangula, quadrata enim ſunt rectangula, quorum baſis & altitudo ſunt æquales. Igitur quadratum minus ex. gr. commutabitur in rectangulum cujus altitudo ſit latus quadrati majoris: & ſic ex duobus quadratis unum erit rectangulum. Altitudo etiam minoris quadrati, aut quælibet alia utrique quadrato aptari poſſet. Porro cum jam ex duobus quadratis una tantum figura deſcripta ſit; modo inveſtiganda eſt methodus quadratum efficiendi duobus datis æquale. Cujus problematis ſequens ſolutio facile intelligetur.

XVI.

Quadratum conſtituere duplum alterius.

Sint duo quadrata A B C D, C B F E æqualia inter ſe, ex quibus unum tantum ſit conſtituendum. Ductis diagonalibus A C & C F facile intelligitur triangula A B C, & C B F ſimul ſumpta eſſe valorem unius quadrati. Igitur transferendo ſuper A F duo triangula D C A, & C E F ſiet quadratum A C F G, cujus latus A C erit diagonalis quadrati A B C D, & cujus ſuperficies æquabit duo quadrata propoſita. Quod demonſtratione non eget. *Fig. 3. Tab. 3.*

XVII.

Quadratum æquale duobus aliis ſimul ſumptis deſcribere.

Fig. 4. Tab. 3. Conficiendum ſit quadratum æquale duobus inæqualibus A D C *d*, C F E *f*, ſive quod idem eſt, figura A D F E *f d* in quadratum ſit commutanda.

Ex methodo præcedenti inveſtigatur an in recta D F punctum H inveniri poſſit adeo ut,

1. ducendo rectas A H, & H E, & agendo triangula A D H, E F H circa puncta A & E donec conſiſtant in A *d b* & in E *f b*, hæc duo triangula concurrant in *b*:

2. ut quatuor latera A H, H E, E *b*, *b* A ſint ſibi invicem æqualia ac perpendicularia.

Hoc autem punctum H invenietur ſi latus D H fiet æquale lateri C F, ſive E F. Ex hac enim æqualitate laterum D H, & C F primum ſequitur punctum H perventum in *b* diſtare a puncto C intervallo æquali lateri D F, ſi ita agatur A D H circa ſuum angulum A ut conſiſtat in A *d b*.

Ex hac eadem data æqualitate laterum D H & C F ſequitur ſecundo H F æqualem eſſe D C, & punctum H pervenire ad idem punctum *b* diſtans a C intervallo æquali lateri D F, ſi triangulum E F H agatur circa punctum E ut conſiſtat in E *f b*.

Figura igitur A D F E *f d* in quadrilateram figuram A H E *b* erit commutata. Nunc autem

tem videndum ſupereſt an ipſius quatuor latera æqualia ſint & ſibi invicem perpendicularia.

Horum quatuor laterum æqualitas evidens eſt. Etenim A *b*, & *b* E ſunt idem ac A H, & H E. Æqualitas autem horum duorum A H & H E ex eo deducitur quod cum D H ſit æqualis C F ſive F E, triangula A D H, H E F ſunt æqualia & ſimilia.

Nunc autem inquirendum remanet an latera figuræ A H E *b* angulos rectos conficiant: quod facile ſic oſtenditur. Dum H A D agitur circum A ut perveniat in *b* A *d*, latus A H eodem modo movebitur ac latus A D; ſed latus A D evadendo A *d* conficiet angulum rectum D A *d*; ergo latus A H evadendo A *b* conficiet angulum rectum H A *b*.

Ceteri anguli H, E, *b* ſunt & ipſi procul dubio neceſſario recti. Figura enim quatuor æqualibus lateribus terminata unum angulum rectum habere non poteſt quin & ceteri ſint pariter recti.

XVIII.

Majus latus trianguli rectanguli hypotenuſa vocatur. Et quadratum hujus lateris eſt equale quadrato aliorum laterum.

Si conſideretur ex duobus quadratis A D C *d*, C F E *f* unum ſuper A D latus medium trianguli A D H eſſe confectum, alterum vero ſuper E F æquale D H parvo lateri ejuſdem trian-

anguli A D H, & quadratum A H E *b* ceteris duobus æquale ſuper latus majus A H, quod communiter trianguli rectanguli hypotenuſa vocatur: innoteſcet hæc maxima triangulorum rectangulorum proprietas: quadratum hypotenuſæ eſſe æquale quadratis ceterorum laterum.

XIX.

Simplex modus duo quadrata in unum commutandi.

Fig. 5. & 6. Tab. 3. Si igitur ex duobus quadratis H D K L, A B C D unum tantum ſit conficiendum, inutile erit unum prope alterum collocare, eaque diſſolvere, Sat enim erit ſi eorum latera A D, D H * ita conſtituantur ut rectum angulum conficiant, & ducatur recta A H. Nam hæc erit latus quadrati quæſiti A H I E.

*Fig. 7. Tab. 3.

X X.

Si trianguli rectanguli latera ſint baſes trium ſimilium figurarum, figura hypotenuſæ erit æqualis ceteris duabus ſimul ſumptis.

Fig. 8. 9. Tab. 3. Si duabus figuris ſimilibus D A F G M, D H P O N ſimul ſumptis tertia æqualis conficienda ſit, baſes * A D, H D ita conſtituantur ut efficiant angulum rectum A D H. Tunc enim hypotenuſa A H trianguli A D H erit baſis figuræ quæſitæ.

*Fig. 10. Tab. 3.

Quod

Quod ſic oſtenditur. Sint quadrata A B C D, D H K L, A H I E ſuper baſes trium ſimilium figurarum confecta; ex articulo XVIII. quadratum A H I E erit æquale duobus quadratis A B C D, D H K L. Sed figuræ ſimiles ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum (1. Part, Art. XLVII.) Ergo tria quadrata A B C D, D H K L, A H I E erunt partes ſimiles figurarum D A F G M, D H P O N, A H Q R S.

Hinc ſequitur figuram A H Q R S duabus aliis æqualem eſſe. Si enim quodlibet ex. gr. ex his quadratis ſit dimidium figuræ cui inſcriptum eſt, nemo erit qui dubitet quin figura A H Q R S ſit duabus aliis æqualis; ipſius enim dimidium æquale erit dimidiis aliarum D H P O N, D A F G M. Idem dicendum ſi quadrata A B C D, D H K L, A H I E ſint bis pars tertia, ſive ter quarta pars &c. figurarum D A F G M, D H P O N, A H Q R S.

XXI.

Plures figuras ſimiles ſimul addere.

Si addendæ ſint tres, quatuor &c. figuræ ſimiles, ſive quod idem eſt, tria, quatuor &c. quadrata, ſervabitur eadem methodus. Si tria quadrata ex. gr. addenda ſint, fiat quadratum duobus primis æquale, huic addatur tertium, & hinc erit quadratum tribus datis æquale.

XXII.

XXII.

Et ſi efficiendum ſit quadratum quinquies ; ſexies &c. altero majus, ex eadem præcedenti methodo problema reſolvetur ; & contra, ſi nempe quadratum deſcribendum ſit quod quinta tantum, ſexta &c. alterius pars eſſe debeat. Huc enim revocare ſat erit methodum tribus datis rectis quartam proportionalem inveniendi. Verum in tertia hujus operis parte directa atque aptior tradetur methodus qua hujuſmodi problemata reſolvantur.

XXIII.

Quadratum numeri eſt productum ex ſui multiplicatione: Et radix quadrati eſt numerus, cujus productum ex ſui multiplicatione eſt quadratum.

Additio figurarum ſimilium certiſſime oſtendit ſcalarum uſum nullo modo eſſe admittendum, ſi quod geometrice fit, demonſtratione probari velit.

Sit ex. gr. conſtruendum quadratum alterius duplum. Qui methodum articuli XVI. ignorarent ſequenti modo ſe gererent.

Dati quadrati latus in plures partes dividerent ex. gr. in centum partes: deinde ex multiplicatione 100. in 100. eruerent 10000. valorem quadrati, atque hinc 20000. valorem quadrati quæſiti.

Ve-

Verum ex hujus quadrati valore modum non aquirerent illud deſcribendi. Etenim latus ejus tali numero exprimere deberent, ut ex ſui ipſius multiplicatione, hoc eſt ex ſui quadrato haberetur productum 20000.

Hunc autem numerum fruſtra in ſcala inquirerent, cujus partes eſſent centenæ lateris primi quadrati. Productum enim numeri 141. ex ſui multiplicatione eſſet 19881., & 142. eſſet 20164., quod a numero inveſtigando longe diſtaret.

Forſitan exiſtimare poſſent dividendo dati quadrati latus in plures quam 100. partes, inventuros harum partium numerum determinatum, quo latus quadrati dupli exprimeretur. Verum quacumque habita exploratione nunquam profecto duos numeros invenirent, quorum unus exprimeret latus, ſive ut ajunt, radicem quadrati, alter vero latus, ſive radicem quadrati dupli.

XXIV.

Numerus eſt alterius multiplex cum ipſum pluries exacte continet. Et latus quadrati eſt incommenſurabile cum ſui diagonali.

Revera in arithmetica demonſtratur, ſi duo numeri non ſint ſibi invicem multiplices, hoc eſt ſi unus alterum adæquate non contineat, quadratum majoris multiplicem non eſſe quadrati minoris. Ita cum quinque ex. gr. per 4. exacte dividi non poſſit, ipſius quadratum

25. dividi exacte non poſſit per 16. quadratum numeri 4,

Igitur ſi ex duobus numeris quorum unus major quidem altero ſit, minor tamen duplo, duo quadrata fiant, habebuntur duo numeri, quorum nnus erit minor quadruplo alterius, quin tamen neque duplum neque triplum eſſe poſſit. Igitur ſi latns quadrati in quemcumque numerum partium dividatur, latus quadrati dupli, quod ex articulo XVI. erit illius diagonalis, adæquatum numerum illarum partium non continebit. Quod geometrice ſic exprimitur: Latus quadrati & ipſius diagonalis ſunt incommenſurabilia.

XXV.

Aliæ lineæ incommenſurabiles.

Sunt & aliæ lineæ incommenſurabiles; nullam ſcilicet habentes communem menſuram, ut ſequentes

1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9. &c.

1., 4., 9., 16., 25., 36., 46., 64., 81. &c.

quarum prima numeros naturales exprimit, altera ipſorum quadrata. Porro ſicuti omnes numeri inter 4. & 9., inter 9. & 16., inter 16 & 25. &c. nullam habent radicem, ita duorum quadratorum latera, quorum unum ſit triplnm, quintuplum, aut ſextuplum &c. alterius, ſunt inter ſe incommenſurabilia.

XXVI.

Verum ex hac plurimarum linearum incommenſurabilitate in dubium fortaſſe verti poſſet propoſitionum veritas, quibus rationem figurarum ſimilium ſtatuimus. In ipſarum comparatione (1. Part. Art. XXXIV. & ſequentibus) adhibita fuit ſcala ut communis omnium ipſarum partium menſura: quod tamen ex dictis limitandum videtur. Operæ igitur pretium eſt pauliſper regredi, atque rimari an veritas earum propoſitionum limitatione aliqua fulciri debeat.

XXVII.

Triangula & omnes figuræ ſimiles habent latera proportionalia etiam cum hæc ſunt incommenſurabilia.

Expendendum modo quod in articulo XXXIX. primæ partis dictum fuit, utrum nempe triangula *abc*, A B C, quorum anguli æquales ſint, habeant latera proportionalia. Sit ex. gr. *ab* baſis primi trianguli, & baſis alterius ſit recta A B æqualis diagonali alicujus quadrati, cujus latus ſit *ab*. In hac hypotheſi inquirendum an ratio lateris A C ad *ac* eadem ſit, ac ratio lateris A B ad latus *ab*. *Fig. 11. & 12. Tab. 3.*

Quicumque partium numerus ſupponatur in latere *ab*, nunquam, ut ex dictis conſtat, latus A B adæquatum iſtarum partium nume-

rum

rum continebit. Hinc autem facile innoteſcit, quo major erit numerus partium lateris *a b*, latus A B magis accedere adæquatæ commenſurabilitati lateris *a b*. Sit itaque *ab* diviſum in 100. partes; numerus harum partium quas A B continebit erit circa 141. & 142., Art. XXIII. Sit autem numerus partium 141., reliquo neglecto, certum eſt (1. Part. Art. XXXIX.) latus etiam A C continere 141. partes lateris *ac*.

Sit deinde *ab* diviſum in 100. partes, numerus earum quas A B continebit erit inter 1414. & 1415. Si reliquo neglecto ſumatur numerus 1414., manifeſtum erit latus pariter A C continere 1414. milleſimas partes lateris *ac*, & univerſim latus A C tot partes cum reliquo continere lateris *a c*, quot A B continebit lateris *a b*, cum reliquo.

Inſuper hæc reliqua, ut oſtenſum eſt, utrinque minora erunt quo major erit numerus partium lateris *a b*; ergo illa omitti poſſunt ſi diviſio lateris *a b* uſque ad infinitum producta cenſeatur. Tunc igitur dici poterit numerum partium lateris *ac* quas latus A C continet, æqualem eſſe numero partium lateris *ab* quæ a latere A B continentur, & ſic A C eſſe ad *ac* ut A B ad *ab*.

Igitur geometrice demonſtratum eſt latera duorum triangulorum, quorum anguli æquales ſint, eſſe proportionalia ſive ſint incommenſurabilia, ſive eorum detur communis menſura.

Propoſitio (1. Part. Art. XLV.) ex qua

erui-

eruitur proportio linearum in figuris ſimili-
bus, eadem ratione probatur.

XXVIII.

Figuræ ſimiles ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum, etiam dum hæc ſunt incommenſurabilia.

Iiſdem omnino rationibus, etiam cum latera figurarum ſimilium ſunt inter ſe incommenſurabilia oſtenditur univerſalis veritas earum propoſitionum quibus Art. XLIV., & XLVII. primæ partis probatum fuit areas triangulorum, & figurarum ſimilium eamdem inter ſe habere rationem, ac quadrata laterum homologorum.

Sint ex. gr. triangula ſimilia A B C, *a b c*, quorum altitudines ſint incommenſurabiles cum baſibus. In hac hypotheſi nullum vel parvum quadratum eſſe poterit communis menſura inter hæc triangula & quadrata ex ipſorum baſibus: hoc eſt tam areæ *a b c* & *a b d e* erunt inter ſe incommenſurabiles, quam areæ A B C & A B D E. Attamen non minus certum erit triangulum A B C eſſe ad quadratum A B D E, ut triangulum *a b c* ad quadratum *a b d e*.

Quod liquido patebit animadvertenti, quo minores erunt ſcalæ partes, qua A B & C K dimetientur, eo magis accedi numero exprimenti rationem trianguli A B C ad quadratum A B D E. Igitur dividendo ſcalam trianguli *a b c* in eumdem partium numerum, & reli-

quo neglecto, iidem omnino numeri exprimment rationem & trianguli A B C ad quadratum A B D E, & trianguli *a b c* ad quadratum *a b d e*. Si vero diviſio ſcalarum in infinitum producta concipiatur, reliqua in nihilum redigentur; atque hinc numeri exprimentes rationem trianguli *a b c* ad quadratum *a b d e* exprimment etiam rationem trianguli A B C ad quadratum A B D E; & ſic triangulum *a b c* erit ad quadratum *a b d e* ut triangulum A B C ad quadratum A B D E.

Idem dicendum de omnibus figuris ſimilibus.

Finis Secundæ partis.

D. CLAIRAUT
ELEMENTA GEOMETRIÆ.
PARS TERTIA.

De dimenſione & proprietatibus figurarum circularium.

Dimenſis omnibus figurarum rectilinearum generibus, inveſtigata fuit methodus figuras determinandi quæ lineis curvis conficiuntur. Agri enim, & univerſim ſpatia, quorum dimenſio inquiritur non ſemper lineis rectis terminantur.

Sæpe ſæpius figuræ curvilineæ ſive mixtæ, hoc eſt partim curvis lineis partim rectis terminatæ ad figuras rectilineas reduci poſſunt, ut jam dictum fuit. Si enim dimetienda eſſet figura A B C D E F G, latus A B accipi poſſet ut compoſitio duarum vel trium rectarum. Deinde ſi curvæ F E D ſubſtitueretur recta F D, haberetur figura rectilinea A B C D F G, cujus diſcrimen a figura mixta ita inſenſibile eſſet, ut una pro altera ſine ſenſibili errore accipi poſſet. *Fig.* 1. *Tab.* 4.

Secundum igitur præcedentes methodos de his figuris agendum eſſet. Verum hoc Geometris nullo modo probatum foret, cum nonniſi ſtrictiores operationes ac demonſtrationes expoſtulent. Et interdum ut figura curvilinea aut mixta in aliam perfecte rectilineam commutaretur, in tot partes ejus circuitus eſſet dividendus, ut communis hæc methodus ſervari non poſſet. Et quidem ipſius uſus reiceretur ſi dimetiendum eſſet ſpatium Z*, aut
Fig. 7. Tab. 4. circulus X. Alia ergo methodus amplectenda eſt ut hujuſmodi dimenſiones inveniantur.
*Fig. 3. Tab. 4. Hic tantum de figuris ſermo erit quæ circuli arcubus conficiuntur.

I.

Menſura circuli eſt productum ex circumferentia in dimidium radii.

Fig. 4. Tab. 4. Area dati circuli X ſit dimetienda. Si ipſi inſcribatur regulare polygonum BCDE, quo plura erunt polygoni latera, eo magis accedet æqualitati circuli. Sed area polygoni (I. Part. Art. XXII.) eſt æqualis toties producto lateris BC in dimidium perpendicularis AH quot ſunt latera polygoni, ſive quod idem eſt, menſura polygoni eſt productum ex circuitu BCDE in dimidium perpendicularis. Ergo multiplicatis in infinitum polygoni lateribus, ipſius area, circuitus & perpendicularis æqualia erunt areæ, circumferentiæ & radio circuli; ergo e menſura Circuli erit

pro-

productum ex circumferentia in dimidium radii.

II.

Hinc ſequitur ſuperficiem circuli B C D eſ- *Fig.* 4. *Tab.* 4.
ſe æqualem ſuperficiei trianguli A B L, cujus altitudo ſit radius A B, & baſis recta B L peripheriæ circuli æqualis.

III.

Igitur radius tantum dimetiendus eſt & circumferentia. Ille facile dimetitur, non vero iſthæc; cujus tamen dimenſio habebitur, ſi filus circulo circumducatur; quod ſæpius practice ſat erit.

Verum dimenſio peripheriæ nondum eſt geometrice cognita, nondum ſcilicet determinata eſt adæquata illius ratio ad radium: ut ad centum mille, & fere ad millionem inventa eſt, immo quouſque libet acceditur, quin tamen unquam poſſit adæquate determinari.

IV.

Simplicior approximatio ea eſt quæ habetur ex Archimede; diametro videlicet in ſeptem partes diviſa, circumferentiam circiter 21., aut 22. partes continere, & ad 22. potius quam ad 21. accedere.

V.

Peripheriæ Circulorum ſunt inter ſe ut eorum radii.

Ceterum ſi vel unius circumferentiæ ratio ad radium ſuum dignoſceretur, omnes aliæ determinari poſſent, cum in omnibus circulis eſſe debeat eadem ratio. Hoc adeo clarum eſt ut demonſtratione non egeat; ſi enim quomodo una circumferentia metita eſſet, metirentur & aliæ; in omnibus æquales radii partes invenirentur.

VI.

Areæ circulorum ſunt proportionales radiorum quadratis.

Evidens eſt & Circulos generali omnium figurarum ſimilium proprietate gaudere (1. Part. Art. XLVII.) videlicet ipſorum ſuperficiem eſſe in eadem ratione ac quadrata laterum homologorum. Verum ut hæc propoſitio applicetur circulis, quoniam iſti lateribus homologis carent, examinentur radii, & dignoſcetur circulorum areas quadratis radiorum eſſe proportionales.

Si hæc propoſitio ſequi non videretur ex XLVII. primæ partis articulo; & peculiaris demonſtratio expoſtularetur, ſat eſſet animadvertere idem omnino eſſe, comparare invicem
Fig. 4. areas circulorum BCD, EFG, ac areas
& 5. triangulorum ABL, AEM, quæ ipſis æqua-
Tab. 4.
les

les ſunt (Art. III.) cum eorum baſes BL, & EM ſint æquales peripheriis BCD, EFG, & eorum altitudines æquales radiis AB, & AE. Sed, art. præc., hæc triangula ſunt ſimilia. Ergo eorum areæ erunt in eadem ratione ac quadrata laterum homologorum AB, AE, quæ ſunt radii circulorum BCD, EFG. Ergo &c.

VII.

Ex tribus circulis quorum radii ſunt trianguli rectanguli latera, ille cujus radius ſit hypotenuſa, æqualis eſt duobus aliis ſimul ſumptis.

Circulorum etiam proprietas eſt ob eorum ſimilitudinem, ut ſi ex tribus trianguli rectanguli lateribus tres circuli deſcribantur, circulus cujus radius ſit hypotenuſa, æqualis ſit duobus aliis ſimul ſumptis.

Hinc ſine ulla dimenſione circulus inveniri poterit æqualis duobus datis. Sic ex. gr. vas faciillime indicata methodo efformari poterit, in quo tanta aquarum copia, ac in aliis duobus ejuſdem altitudinis contineatur? Aut conſtrui poterit tubus, per quem eadem aquarum copia effluat quæ per duos datos effunditur.

VIII.

Corona eſt ſpatium contentum inter duos circulos idem centrum habentes; ejuſque menſura eſt productum ex ſui altitudine in circumferentiam mediam.

Si metienda eſſet ſuperficies coronæ V figuræ Fig. 6. Tab. 4.

ræ contentæ inter duos circulos EFG, BCD idem centrum habentes; primo menti occurreret ſingillatim dimetiendas eſſe duorum circulorum ſuperficies, & minorem a majori eſſe demendam. Verum hoc problema faciliori modo practice reſolvi poterit.

Sit triangulum ABL, cujus altitudo ſit radius AB, & baſis recta BL æqualis circumferentiæ BCD. Si ex puncto E ducatur recta EM parallela ad BL, hæc erit æqualis circumferentiæ EFG, quia ob ſimilitudinem triangulorum AEM, ABL eadem erit ratio inter AB & BL, ac inter AE & EM. Sed ex hypotheſi BL eſt æqualis illi circumferentiæ cujus radius ſit AB. Ergo EM illi circumferentiæ æquabitur, cujus radius ſit AE pars rectæ AB. Idem erit de recta KI parallela ad BL, æquabitur enim circumferentiæ cujus radius ſit AK.

Ex æqualitate ſuppoſita inter circumferentiam EFG & rectam EM ſequitur neceſſario æqualitas trianguli AEM circulo EFG. Ergo ſpatium rectilineum EBLM erit æquale Coronæ V. Sed hoc ſpatium EBLM facile mutari poteſt in rectangulum EBPH, ſecando ML in duas æquales partes MI & IL, & ducendo ad BL per punctum I perpendicularem HIP, quæ efficiet triangulum MHI æquale triangulo dempto PLI.

Ergo ſi ex puncto I ducatur ad BL parallela IK, quæ ſecet EB in duas æquales partes, menſura Coronæ propoſitæ æqualis ſpatio EBLM, ſive EBPH erit productum rectæ

EB

EB per circumſerentiam KI cujus radius ſit AK.

Igitur ut dimetiatur corona V multiplicanda eſt ejus latitudo EB per circumferentiam KOQ, quæ dicitur media inter circumferentias BCD, & EFG quia ſuperat circumferentiam minorem EFG ſive rectam EM quantitate MH, quæ æqualis eſt quantitati PL, qua ipſam ſuperat major circumferentia BCD ſive recta BL.

IX.

Segmentum circuli eſt ſpatium arcu & chorda terminatum. Et dimenſio cujuſcumque figuræ circularis reducitur ad dimenſionem ſegmenti.

Si metienda ſit figura Y variis circuli arcubus & rectis lineis terminata, ſive figura Z arcubus tantum confecta, tota difficultas erit in dimetiendis circuli ſegmentis, ſpatiis videlicet ut ABCE, arcu ABC & chorda AC terminatis. Etenim figuræ ſolis circuli arcubus, ſive arcubus & rectis lineis terminatæ conſiderari poſſunt ut rectilineæ quibusdam ſegmentis auctæ vel diminutæ. Fig. 2. Tab. 4. Fig. 7. Tab. 4. Fig. 8. Tab. 4.

X.

Sector eſt pars circuli a duobus radiis & arcu quem intercipiunt, comprehenſa.

Dimenſio ſectoris, & ſegmenti.

Cognita circuli dimenſione, ſegmentum

quod-

quodcumque A B C E facile metitur. Etenim ſi ducantur ad centrum T arcus A B C rectæ A T, C T, fiet figura A B C T, quæ vocatur ſector, cujus area erit ad circulum ut arcus A B C ad totam circumferentiam, & cujus menſura erit productum ex dimidio radii A T in arcum A B C. Sectore autem determinato, dematur triangulum A C T, & habebitur menſura ſegmenti A B C E.

XI.

Centrum cujuſcumque circuli arcus invenire.

Fig. 2. Tab. 4. Cum ſæpe dimetienda ſit figura aliqua ut Y, cujus arcus H I K centrum ignoratur, neceſſario centrum cujuſcumque arcus quærendum occurrit. Ignorato enim centro, figuram quoque ignorari neceſſe eſt cum præcedens methodus radii cognitionem expoſtulet.

Fig. 9. Tab. 4. Sit A B C arcus propoſitus. Si ex quibuſcumque punctis A & B hujus arcus & centris deſcribantur quatuor arcus *goi*, *fob*, *lpk*, *mpn*, quorum duo primi ſint quocumque intervallo deſcripti, alii vero aut eodem, aut quocumque alio, centrum quæſitum manifeſte erit in recta *op* quæ conjunget interſectionis puncta *o* & *p*.

Deinde accipiendo tertium punctum C in eodem arcu A B C, & idem efficiendo in B, & C, quod in A, & B factum eſt, habebitur recta *qr*, in qua etiam erit centrum quæſitum. Igitur hoc centrum erit

T pun-

T punctum concurſus rectarum $o\,p$, $q\,r$.

XII.

Itaque quomodocumque tria puncta collocentur dummodo non directe, arcu circuli ſemper conjungi poterunt, ſive quod idem eſt, quacumque data proportione laterum A C, B C trianguli A C B ad baſim, huic triangulo circulum circumſcribi poterit. Fig. 10. Tab. 4.

XIII.

Duæ rectæ ex quocumque puncto circumferentiæ ſemicirculi ad extremitates diametri ductæ efficiunt angulum rectum.

Methodus circulum triangulo circumſcribendi ſi ſucceſſive applicetur variis triangulis A C B, A E B, A G B plus minuſve erectis ſuper A B, hoc manifeſtum erit quod a triangulo A C B cujus angulus ad verticem ſit valde acutus declinando ad alia triangula A E D, A G B quorum angulus ad verticem eſt apertior, centrum circuli circumſcripti ad A B ſemper accedit, immo ſubter A B interdum tranſit, ut dum habetur angulus ad verticem A G B. Quare animadvertenti hoc centrum deſuper aut ſubter A B aliquando inveniri videtur quærendum cujus ſpeciei ſit triangulum A F B dum in recta A B eſt circumſcripti circuli centrum. Fig. 11. Tab. 4. Fig. 12. Tab. 4.

Ut hoc triangulum A F B dignoſcatur primo

mo ſciendum eſt partem circuli Triangulo circumſcriptam in data hypotheſi eſſe ſemicirculum. Er revera cum centrum circuli ſit in recta A B cujus extremitates ex hypotheſi ſunt in circumferentia, centrum M erit præciſe in media recta A B, & ſic A B neceſſario erit diameter.

Deinde ſi ex quocumque ſemicirculi puncto F ducantur rectæ A F, F B, angulus A F B erit rectus. Nam ducendo F M triangula A F M, M F B ſunt iſoſcelia. Ergo angulus A F M erit æqualis angulo F A M, & angulus M F B angulo F B M, ſive quod idem eſt, totus angulus A F B æqualis erit ſummæ angulorum F A M, F B M. Sed tres anguli A F B, F A M, F B M ſimul ſumpti æquantur duobus rectis. Ergo angulus A F B erit rectus.

Sic ſi ſuper baſim A B quodcumque triangulum rectangulum deſcribatur, hoc erit inſcriptum circulo, cujus centrum ſit in baſi. Quod quærebatur.

XIV.

Quoniam ex præcedentibus compertum eſt angulum cujus vertex eſt in ſemicirculo & diametro inſiſtit, ſemper rectum eſſe, nunc inveſtigandum occurrit, an reliquæ circuli partes aliquam habeant analogam proprietatem; an ex. gr. anguli A C B, A E B, A F B
Fig. 13. Tab. 4. in ſegmento A C E F B ſint inter ſe æquales ut illi in Semicirculo.

Quod ut innoteſcat, inquiratur primo unius an-

anguli valor, deinde an ceteri huic æquales ſint inveſtigabitur. Sumatur ex. gr. angulus AEB cujus vertex E ſit in medio arcu AEB. *Fig.14. Tab.4.* Sicuti recta EDG quæ tranſit per centrum D ſecat hunc angulum in duas æquales partes, ſat erit metiri angulum AEG ipſius dimidium, ſive, quod idem eſt, determinare ſufficiet quæ pars anguli jam metiti ADG ſit angulus AEG: dixi angulum ADG jam metitum quia (1. Part. Art. 11.) arcus AG eſt ipſius menſura.

Si animadvertatur triangulum AED eſſe æquicrure, facile dignoſcetur angulum AEG eſſe dimidium anguli ADG, cum anguli AED, EAD (1. Part. Art. XXXI.) ſint æquales. Sed (1. Part. Art. LXVIII.) hi duo anguli ſimul ſumpti æquantur externo angulo ADG. Ergo angulus AED ſive AEG erit dimidium anguli ADG.

Sed eadem ratione angulus DEB eſt dimidium anguli GDB. Ergo totus angulus AEB æqualis erit dimidio anguli ADB. Ergo dimidium arcus AGB erit ipſius menſura.

XV.

Omnes anguli quorum vertices ſunt ad peripheriam, & qui eidem arcui inſiſtunt, æquales ſunt: & hujuſmodi arcus dimidium eſt eorum communis menſura.

Ut innoteſcat an angulus AEB cuicumque angulo æquetur cujus vertex ſit in eodem ſegmen-

mento, examinandum eſt utrum quicumque angulus A F B ex. gr. ſit dimidium anguli ad centrum A D B. Hoc facile compertum erit ſi per centrum ducatur recta F D G. Etenim angulus A F B compoſitus erit ex duobus A F D, D F B qui ex præcedenti articulo erunt dimidia angulorum A D G, G D B: ergo totus angulus A F B erit dimidium anguli A D B. Si autem de omnibus angulis * A C B, A E B, A F B quorum vertices ſunt ad peripheriam, & qui eidem arcui A G B inſiſtunt, idem ſermo habeatur, concludi poterit omnes inter ſe æquales eſſe, quomodo in articulo præcedenti ſuſpicatum fuit.

Fig. 15. Tab. 4.

* Fig. 13 Tab. 4.

XVI.

Inter varia angulorum genera quorum vertices ſunt in arcu A C E F B habentur nonnulli qui primo a demonſtratione præcedenti excludi videntur, ut angulus A F B * ita poſitus ut recta F D G per centrum ducta tranſeat extra angulum A D B. Verum ſi conſideretur angulum D F A eſſe dimidium anguli G D A, & angulum D F B eſſe dimidium anguli G D B, dignoſcetur angulum A F B exceſſum anguli D F B ſuper angulum D F A eſſe in data hypotheſi dimidium anguli A D B exceſſus anguli G D B ſuper angulum G D A.

* Fig. 16 Tab. 4.

XVII.

Propter figuras quæ hucuſque adhibitæ ſunt de-

demonſtratio præcedens ad ſegmenta tantum ſemicirculo majora pertinere videtur. At facile demonſtratur quemcumque angulum A F B, cujus vertex ſit in ſegmento ſemicirculo minori ſemper eſſe compoſitum ex duobus D F B, D F A dimidiis angulorum B D G, A D G, & conſequenter dimidium arcuum B G, A G, hoc eſt dimidium arcus A G B eſſe menſuram anguli A F B. Fig. 17. Tab. 4.

XVIII.

Tangens Circuli eſt linea quæ ipſum in puncto tangit. Et angulus a chorda & tangente interceptus vocatur angulus ad ſegmentum: ejuſque menſura eſt dimidium arcus ſegmenti.

Poſita æqualitate angulorum ad circumferentiam in eodem ſegmento A E B, A F B, A H B, quærendum eſt quid evadat angulus A Q B cum ipſius vertex deſinit in punctum B extremitatem baſis A B. Evaneſcit ne ille angulus? hoc videtur omnino impoſſibile, ut nulla præhabita diminutione repente omnino diluatur. Verum ſi punctum ignoratur in quod hic angulus ultimo deſinat, quomodo metiri poterit? Hæc difficultas reſolvi haud poſſe videtur ſine infiniti geometria, cujus idea ſaltem imperfecta omnibus hominibus inſita eſt; quæ ſolummodo debet explicari. Fig. 18. Tab. 4.

Hoc primum animadvertatur quod cum punctum E ad B accedit evadendo F, H, Q &c., recta E B ſemper diminuitur, & angu-

lus

lus E B A ab ipſa & recta A B interceptus magis magiſque aperitur. Verum quo recta QB diminuitur, Angulus QBA nunquam in nihilum deſinit, cum ut ſenſibilis fiat, tantum recta QB eſt producenda in R. Hoc idem ne dicendum cum linea QB ad Zerum uſque diminuetur? Tunc quomodo conſiſtet? Quid de illius productione ſentiendum?

Hæc nihil erit, niſi recta BS, quæ in uno tantum puncto B circulum tanget; & ideo tangens appellatur.

Manifeſte inſuper conſtat rectam AE quæ ſucceſſive erit AF, AH, AQ &c. ſemper ad AB accedere, & tandem in illam deſinere, dum linea EB ſemper diminuta evaneſcit. Igitur angulus ad peripheriam ABE factus primo AFB, AHB, AQB fit tandem angulus ABS ex chorda AB & tangente BS comprehenſus, qui vocatur angulus ad ſegmentum, & cujus menſura eſt ſemper dimidium arcus AGB.

Quamvis hæc demonſtratio abſtracta fortaſſe Tyronibus videri poſſit, eam tamen haud omittere operæ pretium duxi, cum in hujuſmodi conſiderationibus mentem exercere maximæ ſit utilitatis iis potiſſimum qui ad infiniti geometriam velint incumbere.

Si autem eorum vires penitus excedat, explicari poteſt prima tangentium proprietas, ex qua aliam demonſtrationem facile aſſequentur.

XIX.

XIX.

Tangens eſt perpendicularis diametro per punctum contactus tranſeunti.

Princeps tangentis proprietas eſt ut in quocumque puncto B circulum tangat, ſit neceſſariò perpendicularis diametro IDB per hoc punctum tranſeunti. Nam cum peripheria ſit ita ſibi æqualis ut a quacumque diametro IDB in duos ſemicirculos IAB, IOB æquales, & æqualiter diametro inſiſtentes dividatur, neceſſe eſt ut partes BS, & BH tangentis quæ duobus ſemicirculis communis eſt, æqualiter quoque reſpectu diametri conſiſtant. Quod haberi non poſſet quin diameter IDB perpendicularis eſſet ad tangentem HBS. *Fig.19. Tab.4.*

XX.

Hinc dignoſcitur quare dimidium arcus AGB ſit menſura anguli ad ſegmentum ABS.

Etenim angulus ADB cum æqualibus angulis DAB, DBA (1. Part. Art. LXIV.) duos rectos conſtituit. Igitur dimidium anguli ADB cum angulo DBA conſtituit unum rectum. Sed angulus quoque DBA cum angulo ABS efficit unum rectum. Ergo angulus ABS æqualis erit dimidio anguli ADB. Ergo dimidium arcus AGB erit menſura anguli ABS.

XXI.

Segmentum dati anguli capax. Et modus illud deſcribendi.

Ex hac altera demonſtratione hujus Circulorum proprietatis dimidium nempe arcus A G B eſſe menſuram anguli A B S oritur ſolutio ſequentis problematis.

Super rectam A B ſegmentum deſcribere capax anguli dati L; hoc eſt ſegmentum A F B, in quo omnes ad Peripheriam anguli A F B æquales ſint angulo dato L.

Fig.20. & 21. Tab.4.

In punctis A & B fiant anguli B A S, & A B S æquales angulo L. Deinde ſuper A S & B S excitentur perpendiculares A D, & B D. Earum occurſus D erit centrum quæſiti arcus A F B.

Nam ex Art. XIX. rectæ B S, & A S erunt tangentes circuli, cujus centrum eſt D, & radius A D ſive B D, quoniam B D & A D ſunt perpendiculares ad B S & ad A S. Inſuper ex articulo præcedenti dimidium arcus A G B eſt menſura anguli A B S, & ex XV. dimidium arcus A G B eſt menſura anguli A F B. Ergo angulus A F B æqualis erit angulo A B S, hoc eſt angulo L Q T quod quærebatur.

XXII.

Diſtantiam invenire unius loci a tribus aliis, quorum diſtantiæ cognoſcuntur.

Cognitio explicatæ Segmentorum proprieta-

ris

tis veriſimiliter Geometrarum curioſitati referenda eſt. At maximo eſt uſui ſicut & plures aliæ quæ licet initio utiles non videantur; præcipuæ tamen utilitatis deinde eſſe ſolent. Praxi enim recenſitæ Circulorum proprietates plurimum inſervierunt, plurimaſque attulerunt proprietates, quarum una in ſequentis problematis ſolutione apparebit, quod ſæpe ſæpius in Geographia ſolet occurrere.

Sint tria loca A, B, C quorum diſtantiæ relativæ AB, BC, AC cognoſcantur, & quærendum ſit in qua ab hiſce locis diſtantia punctum D ſit conſtitutum; ubi omnia tria loca conſpici quidem poſſit, ſed unde egredi non poſſit ad ipſius diſtantiam dimetiendam. *Fig.* 22. *Tab.* 4.

Super papyrum primo deſcribantur tria puncta *abc*, quæ in eadem inter ſe ratione collocentur ac tria puncta A, B, C, hoc eſt geometrice loquendo fiat triangulum *abc* ſimile triangulo ABC. *Fig.* 22. & 23. *Tab.* 4

Ope deinde ſemicirculi cognita magnitudine angulorum ADB, BDC, fiat ſuper *ab* ſegmentum *bda* capax anguli ADB, & ſuper rectam *bc* fiat ſegmentum *bdc* anguli BDC capax. Horum ſegmentorum occurſus *d* deſcribet locum D, hoc eſt rectæ *da*, *db*, *dc* in eadem erunt ratione reſpectu rectarum *ab*, *bc*, *ac*, ac diſtantiæ quæſitæ DA, DB, DC reſpectu cognitarum diſtantiarum AB, BC, AC. Quod profecto demonſtratione non eget, cum ſatis conſtet ex iis quæ dicta ſunt ubi de figuris ſimilibus.

XXIII.

Datis in circulo duabus chordis ſe ſe mutuo ſecantibus, rectangulum ex partibus unius æquale erit rectangulo ex partibus alterius.

Facile oſtendi poſſet praxim ex hiſce circulorum proprietatibus plurimum profeciſſe; ſed aliæ nunc opportunius eorumdem proprietates demonſtrandæ ſunt quæ ex præcedentibus ductæ maximo uſui eſſe ſolent.

Fig.24. Tab.4. Ut ordinatim progrediatur, primum animadvertendum eſt, datis duobus angulis æqualibus EDC, EBC eidem arcui EC inſiſtentibus, triangula DAE, BAC habere angulos æqnales, videlicet (1. Part. Art. XXXIX.) eſſe ſimilia.

Nam qua ratione angulus EDC æqualis eſt angulo EBC, eadem angulus DEB æqualis erit angulo DCB. Anguli vero DAE, & BAC erunt æquales, tum quia ab iiſdem lineis intercepti; tum quia in duobus triangulis ſi duo anguli unius æquales ſint duobus alterius, tertii quoque erunt æquales. (1. Part. Art. XXXVIII.)

Ut facilius deinde in triangulis ADE, ABC generales triangulorum ſimilium proprietates dignoſcantur, Triangulum * DAE conſtituatur ſuper triangulum BAC ponendo AB ſuper AB, & AE ſuper AC ita ut DE ſit parallela ad BC. Tunc recurrit quod obſervatum eſt.

*Fig.24. & 25. Tab.4.

1. Datis duobus triangulis ſimilibus ADE,

ABC,

ABC, quatuor latera AC, AE, AB, AD eſſe proportionalia. (1. Part. Art. XXXIX.)

2. In omnibus proportionibus productum extremorum æquale eſſe mediorum producto (11. Part. Art. VIII.) Unde inferri poterit rectangulum ſive productum ex AC in AD æquale eſſe rectangulo ex AE in AB: quod eſt maxima circuli proprietas, quæ ſic enunciari poteſt: Si in Circulo ducantur duæ rectæ ſe mutuo ſecantes, productum ex duabus partibus primæ æquale erit producto ex duabus partibus alterius.

XXIV.

Quadratum cujuſcumque perpendicularis ad diametrum æquale eſt rectangulo ex partibus diametri.

Si duæ rectæ BE, DC ſe ſecent perpendiculariter, & ex ipſis una ſit diameter DC, duæ partes AB, AE alterius rectæ BE erunt æquales. Ac proinde præcedens proprietas in data hypotheſi ſic erit enuncianda: Si ſuper circuli diametrum DC ducatur quæcumque perpendicularis AB, quadratum hujus æquale erit rectangulo ex diametri partibus, hoc partis AD in AC. *Fig. 26. Tab. 4*

XXV.

Rectangulum in quadratum commutare.

Ex præcedenti articulo modus eruitur rectangulum commutandi in quadratum. Sit ACFE *Fig. 27. Tab. 4.*

 rectan-

rectangulum propoſitum. Producatur A C in D ita ut recta A D æqualis ſit rectæ A E, & deſcribatur ſemicirculus D B C, cujus diameter ſit D C. Deinde producatur latus E A donec in ſemicirculum occurrat. Tunc A B erit latus quæſiti quadrati A B G H æqualis dato rectangulo A F C E.

XXVI.

Methodus inveniendi mediam proportionalem.

Sæpe ſæpius præcedens problema aliter proponi ſolet: inter duas, ſcilicet datas rectas mediam proportionalem invenire. Ea vero dicitur media proportionalis quæ eo major ſit minori ex datis rectis, quo eſt minor majori ex ipſis: hoc eſt ſi A B ex. gr. ſit media proportionalis inter A D & A C, A D erit ad A B, ut A B eſt ad A C. Quod idem eſt ac præcedens problema cum (II. Part. Art. VIII.) productum ex A D in A C, hoc eſt rectangulum harum rectarum æquale ſit producto ex A B in A B, hoc eſt quadrato A B.

Igitur cum inter duas datas rectas media proportionalis erit invenienda, rectangulum ex his rectis in quadratum commutetur; & ipſius latus erit media proportionalis quæſita.

XXVII.

Altera methodus inveniendi mediam proportionalem.

Inveniri etiam poterit media proportionalis

lis ex altera methodo ducta a Circuli proprietate, quæ Art. XIII. explicata fuit. Sit ex duabus datis rectis major AC, & AD minor. Ducatur DB perpendicularis ad AC, & tunc punctum B, ubi hæc perpendicularis occurrit ſemicirculo ABC ſuper diametrum AC conſtituto, dabit rectam AB mediam proportionalem inter AD & AC. Nam ducta recta BC triangulum ABC habebit angulum B rectum. Ergo (1. Part. Art. XXXVIII.) hoc triangulum ſimile erit triangulo ABD cum utrique angulus A ſit communis. Sed datis triangulis ADB, & ABC ſimilibus, ipſorum latera ſunt proportionalia. Ergo AD eſt ad AB, ut AB eſt ad AC. Ergo AB eſt media proportionalis inter AD, & AC. Fig. 28. Tab. 4.

XXVIII.

Figuram rectilineam in quadratum convertere.

Si quæcumque rectilinea figura in quadratum converti velit (ut hoc problema ad Art. XXV. reducatur,) ex ipſa rectangulum fiat. Quod quidem facillimum erit, tum quia figuræ rectilineæ triangulis compactæ ſunt, tum quia triangulum eſt dimidium rectanguli eamdem habentis baſim & altitudinem, tum denique quia omnia rectangula ex triangulis orta unum conſtituunt rectangulum ſi una omnibus detur altitudo. (11. Part. Art. VI.)

XXIX.

Figura quoque circuli arcubus terminata in quadratum converti poterit, ipſius arcuum longitudine practice dimetita. Poterit enim ceu rectilinea in rectangulum converti, ſi menti occurrant articuli IX, & X, ubi tradita fuit methodus omnia circularium figurarum genera dimetiendi.

XXX.

Quadratum efficere quod ſit ad aliud in ratione data.

Ex circuli proprietate in Articulo XXIV. tradita oritur facillima methodus ad quadratum efficiendum quod ſit ad aliud datum in ratione data. Quod in Art. XXII. partis ſecundæ promiſſum fuit.

Sit ex. gr. efficiendum quadratum quod ſit
Fig.29. ad quadratum ABCD ut recta M ad re-
Tab.4. ctam N. Primo latus CB (1. Part. Art. XLI.) ita in puncto E dividatur, ut CB ſit ad BE ſicuti N eſt ad M. Deinde ducatur EF parallela ad AB. Tunc rectangulum ABEF eamdem habebit ſuperficiem, ac quadratum quæſitum. Tantum reliquum erit ut hoc rectangulum in quadratum convertatur.

XXXI.

XXXI.

Poligonum efficere quod ſit ad aliud ſimile in ratione data.

Si efficiendum ſit poligonum HIKLM, quod ſit ad poligonum ſimile ABCDE ut recta X ad rectam Y; primo ſuper AB latus dati poligoni ABCDE fiat quadratum ABGF, deinde deſcribatur aliud quadratum HIOQ quod ſit ad quadratum ABGF ut recta X ad rectam Y. Tum ſi ſuper HI hujus quadrati latus deſcribatur poligonum HIKLM ſimile primo ABCDE, hoc novum poligonum erit, quod quærebatur. Quod certum eſt, quia (1. Part. Art. XLVIII.) figuræ ſimiles ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum. *Fig. 30. & 31. Tab. 4.*

XXXII.

Circulum efficere qui ſit ad alium in ratione data.

Si circulus effici velit qui ſit ad alium datum ut X ad Y, fiat quadratum quod ſit ad quadratum radii circuli dati ut X ad Y. Tunc enim hujus novi quadrati latus erit radius circuli quæſiti.

XXXIII.

Si ex quocumque puncto extra Circulum duæ rectæ ducantur, quæ circulum ſecent, & in cavam peripheriam incidant, rectangula ex his ſectis in ſuas externas partes erunt æqualia.

Ex illa Circuli proprietate qua præcedens

pro-

problema reſolutum fuit, altera eruitur proprietas, videlicet.

Fig. 32. Tab. 4. Si ex puncto A extra Circulum duæ rectæ ABC, ADE ducantur, quæ in duobus punctis peripheriam ſecent: & ſi ducantur rectæ CD, BE, triangula ACD, AEB ſimilia erunt cum angulus A ſit utrique communis, & anguli ad peripheriam C, & E ſint æquales. Sed data ſimilitudine triangulorum CAD, EAB quatuor rectæ AB, AD, AE, AC ſunt proportionales. Ergo rectangulum ex AB in AC æquale erit rectangulo AD in AE: quod ſic enunciari poteſt. Si ex quocumque puncto A extra circulum ducantur duæ rectæ AC, AE quæ circulum ſecent, & in cavam peripheriam incidant, rectangulum ex recta AC in ſui externam partem AB æquale erit rectangulo ex recta AE in ſui externam partem AD.

XXXIV.

Quadratum tangentis æquale eſt rectangulo ex ſecante in ſuam externam partem.

Cum recta ex puncto A ducta circulum non ſecat, ſed eum ſolummodo tangit ut AF, præcedens proprietas in hanc convertitur: Quadratum tangentis AF æquale eſt rectangulo ex tota ſecante AE in ſuam externam partem AD. Nam ſi conſideretur tangens AF ut circulum ſecans in duobus punctis infinite vicinis, rectæ AB & AC unam tantum rectam

ctam efficient AF, & pro rectangulo ex AB in AC habebitur quadratum rectæ AF.

XXXV.

Tangentem ad circulum ducere ex puncto extra ipſum dato.

Quamvis ex præcedenti propoſitione valor quadrati tangentis AF dignoſcatur, modus tamen non eruitur ex dato puncto A eam ducendi. Ut autem innoteſcat quomodo ex dato puncto A duci poſſit, conſideretur (Art. XIX.) radium FG perpendicularem eſſe ad tangentem FA. Inveniendum igitur erit in dato circulo punctum F ita ut angulus AFG ſit rectus: & deſcripto ſuper AG ſemicirculo, punctum ubi ſecabit circulum FKO, erit (Art. XIII.) punctum F quæſitum. *Fig.* 33. *Tab.* 4.

Finis tertiæ partis.

D. CLAI-

D. CLAIRAUT
ELEMENTA GEOMETRIÆ.
PARS QUARTA.

De methodo dimetiendi ſolida, eorumque ſuperficiem.

EX principiis in tribus primis partibus exhibitis ſatis ſuperque reſolvi poſſent problemata iis longe difficiliora. Verum ut præincæpto ordine progrediatur, opportunius ſolidorum dimenſiones hic erunt inveſtigandæ, illarum videlicet extenſionum, quæ tres dimenſiones habent, longitudinem, latitudinem, ac profunditatem.

In has profecto inquiſitiones Geometræ ſtudia omnia primo contulere. Quærendum fuit ex. gr. quot lapides in muro continerentur, *Fig. 1. Tab. 5.* cujus longitudo eſſet AD, latitudo AB, & profunditas BG. Aut determinanda fuit aquæ **Fig. 2. Tab. 5.* copia quæ in cyſterna* ABCD contineretur, ſive invenienda ſoliditas Turris, Obelyſci, Domus &c.

Ut

Ut de figuris trinæ dimenſionis eodem omnino modo agatur, ac de ceteris actum eſt, primo inveſtiganda erunt ſolida planis terminata.

Non erit autem cur de dimetiendis horum corporum ſuperficiebus ſermo habeatur, cum nonniſi figurarum rectilinearum compoſitiones ſint, & conſequenter eorumdem dimenſio ex iis dependeat, quæ demonſtrata ſunt in prima parte.

I.

Cubus eſt ſolidum ſex quadratis terminatum, & eſt communis ſolidorum menſura.

Naturalis rationis lumen docet corpora omnia, ut ipſorum ſoliditas dimetiatur, ad ſimpliciſſimum ſolidum referenda eſſe, ſicuti ad quadratum ſuperficies omnes referuntur. Solidum autem omnium ſimpliciſſimum Cubus eſt qui inter ſolida eum obtinet locum, qui quadrato inter ſuperficies tribuitur: eſt videlicet ſpatium ut *abcdefgh*, cujus longitudo, latitudo, & profunditas æquales ſunt; ſive quod idem eſt, figura ſex quadratis æqualibus comprehenſa.

Latus horum quadratorum latus Cubi appellatur.

Pes cubicus cubum ſignificat, cujus latus eſt unius pedis, item digitus cubicus eſt, cujus latus uno digito metitur.

II.

Parallelepipedum eſt ſolidum ſex rectangulis terminatum. Et plana parallela vocantur quæ inter ſe æqualiter ſemper diſtant.

Fig. 1. Tab. 5. Solida quæ frequentius dimetienda occurrunt, ut A B C D E F G H ſex rectangulis terminantur, A B C D, C B G F, C F E D, D E H A, G F E H, A B G H. Hæc ſolida Parallelepipeda vocantur, quia ipſorum oppoſita plana cum ſemper inter ſe æqualiter diſtent, ſunt parallela, quemadmodum rectæ æqualiter ſemper diſtantes parallelæ dicuntur.

III.

Parallelepipedi menſura.

Id genus ſolida facile dimetiuntur ob eorum cum rectangulis ſuperficiebus analogiam. Primo itaque ſive pede ſive digito ſingillatim dimetiantur longitudo A D, latitudo A B, & profunditas B G. Deinde tres numeri inventi invicem multiplicentur. Tum productum exprimet quot pedes ſive digiti cubici in dato parallelepipedo contineantur. Ut hoc melius oſtendatur, ſit exemplum.

Fac longitudinem A D eſſe ſex pedes, latitudinem A B quinque, & quatuor profunditatem B G. Rectangulum A B C D (1. Part. Art. XI.) ſexies continebit quinque, hoc eſt

30.

30. quadratos pedes. Si deinde rectæ BG, CF, DE, AH ſolidi profunditatem æqualiter dimetientes in quatuor æquales partes dividantur, & ſi per diviſionis puncta ducantur plana ſibi invicem parallela, hæc plana parallelepipedum divident in alia quatuor parallelepipeda, quorum profunditas erit unius pedis; & omnia erunt æqualia & ſimilia. Sed primum ex his parallelepipedis 30. pedes cubicos continet, cum ipſius exterior facies ABCD contineat 30. pedes quadratos. Ergo totum ABCDEFGH quater continebit 30., ſive 120. cubicos pedes.

IV.

Parallelepipeda producuntur ex rectangulo quod ſibimet parallele moveatur.

Non eſt cur in variis explicandis modis immoremur, quibus parallelepipeda practice conſtruantur cum facillime poſſint inveniri. Sequens tamen modus explicatur, cujus cognitio eſt omnium utiliſſima.

Quadratum ſive rectangulum quodcumque ABGH ita ſibi ipſi parallele moveatur, ut quiſque angulus A, B, G, H unam percurrat ex quatuor rectis AD, BC, GF, HE perpendicularibus ad planum rectanguli ABGH.

V.

V.

Recta eſt plano perpendicularis cum ei inſiſtens in neutram partem inclinat. Idem dicendum de plano quod alteri ſit perpendiculare.

Inutile fere videtur animadvertere rectam plano perpendicularem eam eſſe quæ plano inſiſtens in neutram partem inclinat; & planum plano inſiſtens, nec in alterutram partem inclinans huic eſſe perpendiculare. Hæ enim definitiones cum illa analogæ ſunt, in qua recta alteri perpendicularis dicta fuit.

VI.

Recta plano perpendicularis eſt perpendicularis omnibus rectis quæ diſcedunt a puncto, quo illa cadit, & ſunt in eodem plano.

Fig. 4. Tab. 5. Hinc oritur, rectam A B perpendicularem plano X eſſe perpendicularem omnibus rectis A C, A D, A E &c., quæ ex puncto A diſcedentes, ſunt in hoc plano. Si enim recta A B in alterutram ex his rectis inclinaret, in alterutram plani partem eſſet inclinata; ergo plano perpendicularis non eſſet.

VII.

Ut ſenſibilius innoteſcat quomodo recta A B eſſe poſſit perpendicularis omnibus rectis ab extremitate A diſcedentibus, conficiatur figura modo ſequenti.

Sit

Sit ex quacumque materia facile flectenda, ut ex charta, rectangulum F G D E in duas æquales partes diviſum a recta A B perpendiculari lateribus E D, F G. Ita deinde flectatur hoc rectangulum in A B, ut recta A B ſit altitudo plani, & ita flexnm ſuper planum X collocetur. * Quacumque data inclinatione duarum partium F B A E, G B A D rectanguli flexi E A D G B F, ſemper hæ duæ partes erunt in plano X quin recta A B in alterutram hujus plani partem magis inclinet. Ergo hæc recta A B perpendicularis erit omnibus rectis quæ ex ipſius extremitate diſcedentes erunt in plano X. Partes enim A E, A D rectanguli flexi motu deſcripto ſuper has rectas ſucceſſive deferri poterunt. *Fig. 5. Tab. 5.* **Fig. 6. Tab. 5.*

VIII.

Modus practicus aut excitandi aut demittendi perpendicularem ad quodcumque planum.

Ex præcedenti conſtructione intelligitur quomodo ex quocumque dato ſive ſuper planum ſive extra ipſum puncto aut excitari aut demitti poſſit perpendicularis. Etenim punctum ſuper planum ſit A, & extra ipſum ſit H, deferri ſemper poterit rectangulum E F B G D A ſuper Planum X ita ut recta A B datum punctum tangat: & tunc A B erit perpendicularis quæſita. *Fig. 7 Tab. 5*

IX.

Linea eſt perpendicularis plano ſi eſt perpendicularis duabus lineis hujus plani, quæ ab eodem puncto diſcedant quo illa cadit.

Intelligitur etiam lineam A B eſſe perpendicularem plano X ſi eſt perpendicularis duabus hujus plani rectis A E, & A D. Tunc enim A B ſumi poteſt ut flexus rectanguli, cujus alterum latus ſuper A E, & alterum ſuper A D applicetur. Sed hic flexus eſſet perpendicularis plano X. Ergo &c.

X.

Modus excitandi Planum alteri perpendiculare.

Si ſuper quamcumque lineam K L excitari velit planum perpendiculare Plano X in quo eſt linea K L adhiberi poterit idem rectangulum flexum G B F E A D. Nam ſi ſuper lineam K L collocetur A D latus partis A D G B rectanguli flexi, planum hujus partis A D G B erit planum quæſitum.

XI.

Fig. 8. Tab. 5. Si vero collocetur tertium planum Y ſuper duo latera F B, & B G ejuſdem flexi rectanguli, hoc Planum Y erit perpendiculare lineæ A B & parallelum plano X.

Igi-

Igitur ſi a plano X tres æquales perpendiculares non indirectum excitentur, planum Y quod tria puncta F, B, G tangit, erit parallelum plano X.

XII.

Unius plani ad alterum inclinationem metiri.

Si duo plana non ſint invicem parallela ope ejuſdem rectanguli flexi facile cognoſcetur angulus inter ipſa comprehenſus. Nam applicata plano X alterutra hujus rectanguli parte ABGD, angulus EAD, ſive angulus FBG ipſi æqualis metietur inclinationem plani EABF ſuper planum DABG. Quare ſi conſideretur AB eſſe communem horum planorum ſectionem, & lineas EA, & AD eſſe perpendiculares ad AB, ſequens regula facile deducitur. *Fig. 9. Tab. 5.*

Datis duobus planis non parallelis, primo linea recta invenienda eſt quæ ſit communis eorum ſectio. Deinde ſi ex quocumque puncto hujus rectæ excitentur duæ perpendiculares; quarum una in uno, altera in altero exiſtat plano, angulus quem perpendiculares intercipiunt, metietur angulum a duobus planis comprehenſum.

XIII.

Unius rectæ ad planum inclinationem metiri.

Sicuti facile innoteſcit dum ABFE move-

tur circa flexum AB, rectam AE cujus extremitas E deſcribit arcum circuli ED, nunquam egredi a plano EAHD perpendiculari plano X, & inclinationem rectæ EA ad planum X non eſſe niſi angulum EAD; ita facillime intelligitur inclinationem cujuſcumque rectæ EA ſuper planum X metiri ab angulo EAH intercepto ab hac recta EA, & recta AD, quæ ducta a puncto A tranſit per punctum H plani X quo cadit perpendicularis EH in hoc planum demiſſa a quocumque puncto E rectæ AE.

XIV.

Nova methodus demittendi perpendicularem Plano.

Ex ſola conſideratione præcedentis figuræ nova eruitur methodus a puncto E extra planum X dato demittendi rectam EH huic plano perpendicularem.

Ducta in plano X quacumque recta BAS, demittatur ex dato puncto E perpendicularis EA ad hanc rectam. Deinde ex puncto A quo cadit hæc perpendicularis, in plano X excitetur AD perpendicularis ad AB, & ex dato puncto E demittatur EH perpendicularis ad AD. Tunc linea EH erit perpendicularis plano X.

XV.

Altera methodus excitandi perpendicularem dato plano.

Hinc altera deducitur methodus excitandi plano X perpendicularem MN ex dato ſuper hoc plano puncto M.

Ex quocumque puncto E extra planum X demiſſa EH huic plano perpendiculari, ducatur ex dato puncto M recta MN quæ ſit parallela ad HE: hæc recta MN erit perpendicularis plano X.

XVI.

Priſma rectum eſt figura ſolida, cujus duæ oppoſitæ baſes ſunt duo æqualia poligona, & ceteræ ſuperficies ſunt rectangula.

Poſt parallelepipedum ſolidorum omnium ſimpliciſſimum eſt Priſma rectum. Cujus exhibetur in ABCDEFGHIKLM, cujus duæ baſes oppoſitæ & parallelæ ſunt duo poligona æqualia, & ita poſita ut latera GF, FE &c. unius ſint parallela lateribus alterius BC, CD &c., & cujus ceteræ ſuperficies ſunt rectangula ABGH, BGFC &c. *Fig.* 10 *Tab.* 5

XVII.

Conſtructio priſmatis recti.

Geometræ has figuras conſtrui ſupponunt ut

parallelepipeda, ex baſi videlicet A B C D L M quæ ſibi parallela moveatur ut anguli A, B &c. percurrant rectas plano baſis perpendiculares.

XVIII.

Ut varia priſmatum rectorum genera diſtinguantur, appellari ſolent poligoni nomine quod eſt eorum baſis. Priſma ex. gr. hexagonale vocatur cujus baſis eſt Hexagonum.

XIX.

Duo priſmata, quorum baſes ſunt æquales, ſunt inter ſe in ratione altitudinum.

Ut methodus inveniatur qua omnia priſmatum rectorum genera metiri poſſint, animadvertatur, datis duobus priſmatis rectis, quorum baſes ſint æquales, illud cuius altitudo major eſt, majorem habere ſoliditatem in ea ratione qua major eſt ipſius altitudo.

XX.

Duo priſmata ejuſdem altitudinis ſunt inter ſe in ratione baſium.

Obſervetur deinde duo priſmata recta quorum quidem altitudo eadem ſit, baſis vero unius in alterius baſi contineatur, eſſe inter ſe in eadem ratione ac baſes. Hujus propoſitionis veritas facile intelligitur ex conſtructione priſmatum explicata Art. XVII.

Sint

Sint duo priſmata ejuſdem altitudinis *a b c d* *e f g h i k l m*, & A B C D E F G H I K L M, & baſis *a b c d l m* ſit ex. gr. quarta pars baſis A B C D L M. Quoniam duo priſmata harum baſium motu conſtructa ſunt, quodcumque planum baſibus parallelum & ſecans utrumque priſma efficiet duo poligona baſibus priſmatum æqualia: hoc eſt ſectio majoris priſmatis erit quadrupla ſectionis priſmatis minoris. Igitur priſma A B C D E F G H I K L M conſiderari poterit ut compoſitum partibus quadruplis partium priſmatis *a b c d e f g h i k l m*. Ergo ſoliditas primi erit quadrupla ſoliditatis alterius. *Fig.* 10. *&* 11. *Tab.* 5.

XXI.

Menſura priſmatis recti eſt productum baſis in altitudinem.

Poſt hujuſmodi duas animadverſiones ſequens regula firmanda eſt ad omnium priſmatum rectorum dimenſionem.

Pede vel digito quadrato menſuretur area baſis propoſiti priſmatis; deinde numerus pedum baſis multiplicetur in numerum pedum vel digitorum altitudinis. Productum erit numerus pedum vel digitorum cubicorum quos propoſitum priſma continebit.

XXII.

Inter recta & obliqua priſmata hoc intereſt ut plana quæ in rectis rectangula ſunt, in obliquis ſint parallelogramma.

Fig.13. Tab.5. Priſmata etiam vocantur ſolida quorum baſes ſunt quidem poligona æqualia, eorum tamen cetera plana non rectangula ſunt ſed parallelogramma. Ut id genus priſmata ab iis diſtinguantur quæ ſuperius deſcripta ſunt, appellantur priſmata obliqua.

XXIII.

Conſtructio priſmatis obliqui.

Priſmata obliqua conſtructa intelliguntur a baſi *abcki* quæ ſibi parallela ita moveatur, ut ejus anguli percurrant rectas parallelas *ag*, *bh*, *cd* &c. quæ a plano baſis excitantur, eique non ſunt perpendiculares.

XXIV.

Ex analogia quæ inter hujus, & priſmatis recti (Art. XVII.) conſtructionem habetur, facile eruitur dimenſio ſoliditatis priſmatis obliqui. Nam ſi prope obliquum priſma *abcdef*
Fig.12. & 13. Tab.5. *ghik* collocetur priſma rectum ABCDEF GHIK ejuſdem baſis, & hæc duo priſmata inter duo plana parallela conſtituantur, eorum ſoliditas erit omnino eadem.

Nam

Nam ſi per quodcumque altitudinis punctum P tranſeat planum baſi parallelum, ſectiones NOPQR, *nopqr*, quas hoc planum in utroque priſmate efficit, conſiderari poterunt ut baſes æquales ABCKI, *abcki* tranſlatæ in NOPQR, *nopqr* eodem motu quo priſmata conſtructa ſunt. Atque hinc hæ duæ ſectiones erunt poligona æqualia.

Sed omnes partes, in quas hæc duo priſmata iiſdem ſecantibus planis dividi poſſunt, ſunt æquales. Ergo harum partium compago, hoc eſt tota priſmata erunt æqualia.

Hæc propoſitio ſic enunciari ſolet: Priſmata obliqua rectis æqualia ſunt, ſi eamdem baſim, eamdemque altitudinem habeant. Altitudo autem priſmatis eſt perpendicularis a ſuperiori plano in inferius demiſſa.

XXV.

Parallelepipeda obliqua rectis æqualia ſunt cum eandem baſim, eandemque altitudinem habent.

Cum Parallelepipeda inter priſmata numeranda ſint, quod de priſmatis dictum eſt extendi poteſt ad parallelepipeda obliqua, figuras videlicet, ut *abcdefgh*, conſtructas ex motu quadrati, rectanguli, aut perallelogrammi quo eorum quatuor anguli percurrant lineas parallelas quæ oblique a baſi excitantur. *Fig. 14. & 15. Tab. 5.*

Itaque parallelepipedum obliquum *abcdefgh* æquale erit parallelepipedo recto ABCDE FGH

FGH ſi baſis *abgb* eadem eſt aut eamdem habet ſuperficiem ac baſis ABGH, & ſi perpendicularis demiſſa a plano *dcfe* ſuper planum *abgb* æqualis eſt perpendiculari demiſſæ a plano DCFE ſuper planum ABGH.

XXVI.

Parallelepípedis & priſmatis conſideratis, examinentur Pyramides, corpora videlicet ut *Fig.*16. *Tab.*5. ABCDEFG conſtructa triangulis quæ omnia ab eodem vertice A cadunt in quamcumque baſim poligonam BCDEFG. Hæc ſolida neceſſario conſideranda ſunt non ſolum ob eorum uſum in ædificiis, ceteriſque operibus conſtruendis verum etiam quia omnia ſolida planis terminata, ſunt Pyramidum compago ſicuti figuræ rectilineæ ſunt compago triangulorum. Quod fit manifeſtum ſi ex quocumque interno puncto propoſiti corporis ad omnes ejus angulos ducantur rectæ.

XXVII.

Diſtinguuntur Pyramides, ſicuti priſmata, nomine illius figuræ quæ eſt earum baſis.

XXVIII.

Cum baſis pyramidis eſt regularis figura, & ejus vertex perpendicularis eſt baſis centro H,* Pyramis recta vocatur: obliqua vero cum ejus vertex non eſt centro perpendicularis, ut in fig. 18. tab. 5.

*Fig.16 Tab.5.

XXIX.

XXIX.

Ut acquiratur methodus omnes ſive rectas ſive obliquas pyramides dimetiendi, univerſales de iis inſtituantur animadverſiones, ad quas cognitæ priſmatum proprietates conducunt.

Conſiderata æqualitate priſmatum ejuſdem baſis & altitudinis facile occurrit parallelogramma quoque eſſe inter ſe æqualia, ſicuti triangula, data æqualitate baſis & altitudinis. Cognita hac triplici veritate, facile intelligitur proprietates parallelogrammis & triangulis communes, priſmatis etiam ac pyramidibus convenire. Itaque ſuſpicari poterit utrum pyramides ejuſdem baſis & altitudinis eamdem habeant ſoliditatem.

XXX.

Quod confirmatur ſequentibus animadverſionibus.

Sint duæ pyramides ABCDE, *a b c d e*, quarum altitudines AH, *a h* ſint eædem, & baſes ſint duæ æquales figuræ, ex. gr. duo quadrata æqualia BCDE, *bcde*. Si hæ duæ pyramides concipiantur ſectæ ab infinitis planis parallelis earum baſibus, compertum erit pyramidum partes efficere quadrata æqualia IKLM, *iklm*, & hinc duas pyramides accipi poſſe veluti ex eodem numero partium ſibi invicem æqualium compactas. Ergo ſumma par- *Fig. 17. & 18. Tab. 5.*

partium utriuſque pyramidis eadem eſt, ſcilicet eadem utriuſque ſoliditas.

Si baſes duarum pyramidum ſint alia poligona regularia, aut irregularia BCDEF, *bcdef* inter ſe æqualia, nemo erit qui dubitet quin omnes partes IKLMN, *iklmn* utriuſque pyramidis ſint inter ſe æquales; atque huic pyramides ejuſdem ſemper ſint ſoliditatis, cum eamdem habent baſim & altitudinem,

Fig.19. & 20. Tab.5.

XXXI.

Hoc facile intelligitur ex demonſtrata æqualitate priſmatum ejuſdem altitudinis. Verum ſimilitudo cujuſcumque partis IKLMN unius pyramidis ad baſim BCDEF, & æqualitas partium IKLMN & *iklmn* licet cuique appareant, demonſtratione tamen maxime egent. Quæ ut inveniatur, quamplurimæ inſtituendæ ſunt conſiderationes de Solidorum ſimilitudine.

XXXII.

Quid ſit ſimil itudo duarum pyramidum.

Sit pyramis ABCDEF ſecta a plano IKLMN baſi parallelo. Oſtendendum erit hanc ſectionem eſſe poligonum ſimile poligono BCDEF, & pyramidem AIKLMN eſſe ſimilem pyramidi ABCDEF; hoc eſt angulos, quos utriuſque pyramidis lineæ conficiunt, eſſe ſibi invicem æquales, & omnia latera minoris pyramidis eamdem habere inter ſe rationem, quam habent latera majoris.

XXXIII.

Primo animadvertatur, ſi duo plana X & Y ſint parallela, & ſecentur a duabus rectis ALB, AME ab eodem puncto A diſcedentibus, rectas LM, DE quæ conjungunt puncta L, M, D, E eſſe parallelas. Etenim ſi hæ duæ rectæ non eſſent parallelæ in aliquam partem concurrerent ſi producerentur. Sed ſi concurrerent, etiam plana in quibus eæ ſunt, & unde egredi nequeunt, una cum ipſis producta concurrerent. Ergo non eſſent parallela contra hypotheſim. *Fig.21. Tab.5.*

XXXIV.

Si igitur planum IKLMN ſit parallelum plano BCDEF, omnes rectæ ML, LK, KI, IN, NM, erunt parallelæ rectis ED, DC, CB, BF, FE, & hinc triangula ALM, AKL, AIK &c. ſimilia erunt triangulis ADE, ACD, ABC &c. Si autem unum horum triangulorum latus AM ex. gr. ſit communis menſura aut ſcala omnium laterum minoris pyramidis; & latus AE ipſi reſpondens ſit ſcala laterum majoris, compertum erit latera ML, LK, KI &c. poligoni IKLMN eſſe proportionalia lateribus ED, DC, CB &c. poligoni BCDEFG. *Fig.19. Tab.5.*

Facile quoque intelligetur omnes angulos IKL, KLM &c. & BCD, CDE &c. eſſe ſibi invicem æquales, cum primos efficiant re-

ctæ

ctæ parallelæ lateribus, quibus ceteri comprehenduntur. Quare duo poligona I K L M N, B C D E F erunt ſimilia.

XXXV.

Itaque cum latera A M, A L, A K &c. ſint proportionalia lateribus A E, A D, A C &c., & anguli A L M, A L K &c. ſint æquales angulis A D E, A D C &c., propter ſimilitudinem triangulorum A L M, A D E, A L K, A D C &c. duæ pyramides A I K L M N, A B C D E F erunt perfecte ſimiles.

XXXVI.

Tandem ſi a puncto A ducatur A H perpendicularis plano poligoni B C D E F, & Q ſit punctum ubi hæc perpendicularis occurrit plano poligoni I K L M N, evidens eſt rectas A Q, A H altitudines pyramidum A I K L M N, A B C D E F eſſe inter ſe in eadem ratione ac latera homologa A M, A E, A L, A D &c. ſive, quod idem eſt, ſi altitudines A Q, A H ſint ſcalæ duarum pyramidum, latera A M, A L &c. continere tot partes altitudinis A Q, quot latera A E, A D &c. continent partes altitudinis A H.

XXXVII.

Pyramides ſuper eadem baſi & inter eamdem altitudinem conſtitutæ ſunt æquales.

Fig. 19. & 20. *Tab.* 5. Si duæ Pyramides A B C D E F, *a b c d e f* ite-

iterum conſiderentur, innoteſcet duas partes IKLMN, *iklmn* eſſe inter ſe ſimiles, cum ſint ſimiles iiſdem baſibus BCDEF, *bcdef*. Innoteſcet inſuper has duas partes eſſe inter ſe æquales cum earum ſcalæ ſint rectæ æquales AQ, *aq* altitudines pyramidum AIKLMN, *aiklmn*.

Quare etſi ignoretur quænam ſit ſoliditas pyramidum, certum tamen eſt eas æquales eſſe ſi ejuſdem ſint baſis & altitudinis: uti ſuppoſitum fuit Art. XXIX.

XXXVIII.

Si duarum pyramidum eadem ſit altitudo, & baſes non ſint poligona ſimilia, ſed tantum ſuperficie æquales, adhuc pyramides ſunt æquales.

Si duarum pyramidum baſes non ſint eædem, ſed tantum æquales ſuperficie, adhuc earum ſoliditas erit æqualis. Nam ſi duæ pyramides *abcdef*, & *arſt* ſint ejuſdem altitudinis *ab*, & ſecentur plano baſi parallelo; evidens eſt eamdem eſſe rationem areæ *iklmn* ad aream *bcdef*, ac areæ *uxy* ad aream *rſt*. Cum enim *iklmn*, *bcdef* (Art. XXXIV.) ſint figuræ ſimiles, nullum eſt inter ipſas diſcrimen (1. Part. Art. XLVIII.) niſi ex ſcalis *aq*, *ab* &c. quibus conſtructæ ſunt; & ex quibus eruitur etiam diſcrimen inter *uxy* & *rſt*, cum ſint & ipſæ ſimiles. Fig. 20. & 22. Tab. 5.

Sed ſi baſes *rſt*, *bcdef* ſunt ſuperficie æqua-

quales, earum partes proportionales *uxy*, *iklmn* erunt æquales. Ergo omnes partes earum pyramidum *arſt*, *abcdef* eamdem extenſionem habebunt. Ergo earum compago hoc eſt totæ pyramides erunt ſoliditate æquales.

XXXIX.

Pyramides ejusdem altitudinis ſunt inter ſe ut baſes.

Quoties baſis *bcdef* primæ pyramidis exacte continet baſim *rſt*, toties ſoliditas primæ *abcdef* continebit ſoliditatem alterius *arſt*.

Nam ſi baſis *bcdef* dividatur in plures partes quarum ſingulæ ſint æquales baſi *rſt*, concipi poteſt pyramis *abcdef* veluti compoſita ex pluribus aliis pyramidibus quarum baſes ſint partes pyramidis *bcdef*. Sed quælibet ex his pyramidibus æqualis eſt alteri pyramidi *arſt*, ſicuti demonſtratum eſt articulo præcedenti. Ergo &c.

Si autem baſis *rſt* non exacte in baſi *bcdef* contineatur, hæ tamen baſes communem habeant menſuram X, dividatur utraque baſis *bcdef*, *rſt* in partes quæ æquales ſint menſuræ X: & tunc manifeſtum erit pyramides *abcdef*, *arſt* tot pyramidibus ſibi invicem æqualibus eſſe compoſitas quot partes X in baſibus continentur. Igitur pyramides *abcdef*, *arſt* erunt inter ſe ut baſes.

Etiamſi baſes ſint incommenſurabiles, Pyramides erunt inter ſe ut baſes. Quod eodem modo demonſtratur ſicuti demonſtratum fuit (II. Part. Art. XXVIII.) de figuris quarum latera ſunt incommenſurabilia. Menſura ſcilicet X uſque ad infinitum minuenda eſt ut communis menſura tum baſis *r ſ t* tum baſis *b c d e f* cenſeri poſſit.

XL.

Cum compertum ſit pyramides ejuſdem altitudinis eſſe inter ſe ut baſes, facilis erit dimenſio earumdem ſoliditatis.

Etenim una tantum pyramis metienda eſt ut ceterarum menſura innoteſcat. Cognita ſit ex. gr. menſura pyramidis A B C D E, & inveſtigari debeat menſura pyramidis A S T V X Y, quæ diverſam habeat baſim & altitudinem. Fiat primo pyramis ſimilis pyramidi A B C D E quæ eamdem habeat altitudinem ac pyramis A S T V X Y. Ut hoc præſtetur (Art. XXXV.) producantur latera A B, A C, A D, A E, eaque ſecet planum L M N O, cujus diſtantia A G a vertice A æqualis ſit altitudini A O. *Fig. 23. 24. Tab. 5.*

Cum itaque compertum ſit quomodo pyramis A B C D E dimetiatur, comperta quoque erit dimanſio pyramidis ipſi ſimilis A L M N O. Quod enim præſtatur in pyramide A B C D E dimetienda, hoc in dimenſione alterius ſimilis præſtari poterit, ſi tamen diverſa ſcala adhibeatur.

Sit igitur metita pyramis ALMNO. Huius menſura determinabit propoſitam pyramidem ASTVXY, cum ex articulo præcedenti duæ pyramides ſint inter ſe ut baſes LMNO, STVXY, quarum ratio demonſtrata eſt in ſecunda parte.

XLI.

Cum igitur unius tantum pyramidis menſura inveſtigari debeat ut ceteræ omnes dimetiantur, ſit pyramis omnium ſimpliciſſima: quæ efformari poteſt ducendo ex quatuor angulis A, B, C, H unius faciei cubi ABCD *Fig.25. Tab.5.* EFGH quatuor rectas ad punctum O centrum cubi, hoc eſt ad punctum æque diſtans ab A, D, B, E &c.

Conſtat hanc pyramidem eſſe ſextam cubi partem cum reſolvi poſſit cubus in ſex æquales pyramides quarum baſes ſint facies cubi. Sed valor cubi eſt productum ex altitudine AF in baſim ABCH. Ergo ut valor pyramidis innoteſcat, dividendum eſt productum ex AF in ABCH in ſex æquales partes; ſive, quod idem eſt, ducenda eſt ſexta pars altitudinis AF in baſim ABCH. Et cum ſexta pars altitudinis AF ſit tertia pars altitudinis OL pyramidis OABCH quia OL eſt dimidium lateris cubi, menſura pyramidis OABCH erit productum tertiæ partis altitudinis in baſim.

XLII.

XLII.

Soliditas pyramidis eſt productum baſis in tertiam partem altitudinis.

Sit pyramis quæcumque O K M N S T V dimetienda. Concipiatur cubus cujus latus A B vel A F ſit duplum altitudinis O L propoſitæ pyramidis, & in hoc cubo concipiatur pyramis O A B C H cujus vertex ſit ad centrum cubi, baſis autem ſit A B C H una ex ejuſdem cubi ſuperficiebus. Hæc pyramis eamdem altitudinem habet quam altera. Ergo (Art. XXXIX.) ſoliditas hujus O A B C H erit ad ſoliditatem alterius O K M N S T V ut baſis A B C H ad baſim K M N S T V. Sed ex articulo præcedenti productum tertiæ partis altitudinis communis O L in baſim A B C H eſt valor pyramidis O A B C H. Ergo productum tertiæ partis ejusdem communis altitudinis O L in baſim K M N S T V erit valor pyramidis propoſitæ O K M N S T V. Hinc habetur generale theorema, menſuram pyramidis eſſe productum baſis in tertiam altitudinis partem.

XLIII.

Pyramis eſt tertia pars priſmatis eamdem baſim eamdemque altitudinem habentis,

Cum (Art. XXI.) ſoliditas priſmatis ſit productum baſis in altitudinem, pyramis ex

articulo præcedenti erit tertia pars priſmatis eamdem baſim, eamdemque altitudinem habentis.

XLIV.

Dimetitis ſolidis quæ planis terminantur, inveſtigari debet methodus qua metita fuerint ſolida quorum ſuperficies curvæ ſunt. Et cum in tertia parte nonniſi de figuris circularibus actum ſit, hic nonniſi de corporum ſuperficiebus circularibus ſermo inſtituetur.

Duo in hiſce corporibus examinandis inquirenda ſunt, ſuperficierum, & ſoliditatum menſura. Cum enim eorum ſuperficies aut curvæ ſint, aut partim planæ partim curvæ, revocari huc non poteſt methodus primæ partis, quemadmodum de ſolidorum ſuperficiebus planis præſtitum eſt.

XLV.

Cylindrus eſt ſolidum duobus circulis oppoſitis & parallelis terminatum, & plano circa eorum peripherias flexo. Alius rectus eſt, alius obliquus.

Solidorum omnium curvorum ſimpliciſſimus eſt Cylindrus, ut ABCDEF cujus baſes ABC, DEF ſunt circuli æquales & paralleli ſimul conjuncti ſuperficie curva quæ concipi poteſt veluti planum circa eorum peripherias flexum.

Fig. 27. 28. Tab. 5.

Si duo circuli ita ſint poſiti ut centrum

G pri-

G primi ſit perpendiculare centro H alterius, Cylindrus appellatur rectus. *Fig.* 27. *Tab.* 5.

Contra vocatur obliquus cum recta per centra G & H ducta obliqua eſt planis ABC, DEF. *Fig.* 28. *Tab.* 5.

XLVI.

Cylindri geneſis.

Hæc ſolida quemadmodum priſmata & parallelepipeda, de quibus Art. XVII., geometrice generantur ex motu circuli ita parallelo ut omnia ipſius puncta deſcribant rectas parallelas ejusdem circuli plano inſiſtentes.

XLVII.

Superficies curva Cylindri recti æqualis eſt rectangulo cujus eadem ſit altitudo, & baſis æqualis ejusdem Cylindri circumferentiæ.

Sequenti methodo ſuperficies cylindri recti menſuratur. Quod practice ſæpe ſæpius præſtandum eſt.

Si dividantur duæ circumferentiæ ABC, DEF in eumdem numerum partium æqualium, & diviſionis puncta ſibi invicem reſpondeant, habentur duo poligona regularia, quorum oppoſiti anguli ſi lineis conjungantur, habebitur priſma cujus ſuperficies compoſita erit tot rectangulis cylindro inſcriptis quot ſunt latere cujuſque circumferentiæ ABC, DEF. Sed altitudo horum rectangu- *Fig.* 27. *Tab.* 5.

lorum æqualis eſt altitudini A B. Ergo eorum menſura erit productum altitudinis A B in ſummam omnium baſium, hoc eſt in ambitum poligoni inſcripti circulo D E F, vel A B C.

Sed ſicuti quo plura erunt poligoni latera, eo magis ipſius ambitus accedet ad circumferentiam, & ſuperficies priſmatis ad ſuperficiem cylindri, ita ſi poligonum in infinita latera diviſum concipiatur, priſma idem erit ac cylindrus. Ergo curva ſuperficies cylindri recti æqualis erit rectangulo, cujus altitudo ſit A D, & baſis linea recta æqualis circumferentiæ D E F.

Hac propoſitione quiſque plane aſſequetur quantum panni opus ſit ad circumveſtiendam columnam cylindricam, vel internam ipſius ſuperficiem exornandam.

XLVIII.

Superficies autem cylindri obliqui non eodem modo menſurari poteſt, cum figuræ ipſis inſcriptæ non rectangula ſint, ſed parallelogramma diverſæ altitudinis. Hujus ſuperficiei menſura, non exacta quidem ſed proxima ſolum nonniſi dificillima methodo invenitur. Porro id genus problemata ad elementa non pertinent.

XLIX.

Cylindri ejuſdem baſis & altitudinis ſunt æqualis ſoliditatis.

Soliditas vero cylindri ſive recti ſive obliqui facile dignoſcitur. Quod enim de priſmate dictum eſt ad cylindrum ſpectat, ſi cylindrus conſideretur veluti priſma quod ipſi inſcribi poſſit.

Itaque Cylindri ejuſdem baſis & altitudinis ſunt æqualis ſoliditatis.

L.

Menſura cylindri eſt productum baſis in altitudinem.

LI.

Conus eſt pyramis cujus baſis eſt circulus.

Excepto cylindro, omnium curvorum ſolidorum ſimpliciſſimus eſt conus ut ABCDE, Fig. 29.
cujus baſis circulus eſt, & ſuperficies compo- 30. Tab.
ſita infinitis rectis a vertice A ad circuli peri- 5
pheriam BCDE ductis. Conſiderari poteſt hoc ſolidum veluti pyramis cujus baſis circulus ſit.

LII.

Conus alius eſt rectus alius obliquus.

Si ut in fig. 29. tab. 5. A vertex coni per-

pendicularis ſit O centro baſis, conus vocatur rectus, obliquus vero, ſi non ſit perpendicularis ut in figura 30. ejuſdem tabulæ.

LIII.

Menſura ſuperficiei coni recti eſt productum circumferentiæ baſis in dimidium lateris.

Ut menſuretur ſuperficies coni recti ABC DE, conſidretur hæc ſuperficies quaſi ultima pyramis quæ ipſi inſcribi poſſit: hoc eſt circumferentia baſis BCDE, quemadmodum dictum eſt de cylindro, concipiatur diviſa in infinita latera. Jam vero ductis rectis a vertice A ad omnes angulos, ſuperficies conica erit compoſita ex infinitis triangulis æquicruribus, quorum altitudo erit æqualis lateri coni AB, & baſes ſimul ſumptæ erunt æquales circumferentiæ BCDE. Igitur hujus ſuperficiei menſura erit productum circumferentiæ BCDE in dimidium lateris AB.

Fig. 29. Tab. 5.

LIV.

Conus reſolvitur in ſectorem circuli.

Si interim conſideretur ſuperficiem cujuſcumque ſectoris hujus circuli (III. Part. Art. X.) æqualem eſſe producto arcus hujus ſectoris in dimidium radii, dignoſcetur ad conſtruendum ex charta v. gr. conum rectum ABCDE adhibendum eſſe ſectorem circuli,

cujus

cujus radius æqualis ſit lateri AB, & arcus æqualis circumferentiæ ABCDE.

LV.

Si conus obliquus ſit, ejus vel proxima ſuperficiei menſura, ut de cylindro obliquo dictum eſt, dificillime invenitur. Quod pariter elementorum limites tranſgreditur.

LVI.

Coni ejuſdem baſis & altitudinis ſunt æquales.

Soliditati coni ſive recti ſive obliqui applicari poteſt quod de pyramidibus dictum eſt, cum Conus conſiderari poſſit tamquam ultima pyramis ipſi inſcripta.

Coni itaque ejuſdem baſis & altitudinis ſunt æquales.

LVII.

Soliditatis conicæ menſura eſt productum baſis in tertiam partem altitudinis.

LVIII.

Interdum metiri oportet corpus ut BCD Fig. 31. EFGH, quod conus obtruncatus appellatur, 32. Tab. 15. & eſt pars coni AFGH dum ab ipſo ſectione ad baſim FGH parallela auſertur pars ſive minor conus ABCDE. Hujus ſolidi menſura erit diſcrimen inter ſoliditates conorum ABCDE, & AFGH.

LIX.

Methodus dimetiendi ſuperficiem Coni obtruncati.

Si ſuperficies coni obtruncati a ſectione recti coni proveniat, dimetiendæ ſunt ſuperficies utriuſque coni, & una ab altera demenda eſt. Hoc præſtari poterit ſequenti methodo quæ menti facillime occurrit ex iis, quæ dicta ſunt Articulo LIV.

Fig. 32. 33. Tab. 5. Sit A L R ſector quo factus ſit conus A F G H. Si centro A intervallo A M æquali ad A B deſcribatur arcus M P, ſpatium M P R L erit portio Coronæ, qua circumdari poſſet ſuperficies quæſita coni obtruncati. Sed ſi duæ circumferentiæ, quarum arcus ſimiles ſunt M P, L R, abſolutæ concipiantur, habebitur integra corona, cujus menſura (III. Part. Art. VIII.) erit productum altitudinis M L æqualis ad B F in circumferentiam cujus radius eſt A N, cum N ſit medium inter M & L. Ergo portio coronæ M P R L, ſive ſuperficies coni obtruncati B C D E F G H ipſi æqualis erit productum ex M L in arcum N Q, ſive quod idem eſt, erit productum ex B F in circumferentiam I K L, quæ ſit a plano baſi parallelo ſecante conum in I medio lateris B E.

LX.

Corpus, cujus ſuperficiei puncta omnia æqualiter diſtant a centro, vocatur Sphæra.

Solidorum omnium, de quibus in hiſce elementis agendum eſt, ultima eſt ſphæra aut globus, in cujus videlicet ſuperficie omnia puncta æqualiter diſtant a centro. Sæpe ſæpius hujus ſuperficiei dimenſio neceſſaria eſt. Quiſpiam ex. gr. ſcire aveat quantum auri ad globum inaurandum, vel plumbi ad teſtudinem contegendam neceſſe ſit.

LXI.

Sphærica ſuperficies X, ſi dimetienda ſit, concipi poteſt genita ex revolutione ſemicirculi AMB circa ſuam diametrum AB. *Fig. 34. Tab. 3.*

Supponatur pro ſemi-circumferentia haberi poligonum regulare parvorum laterum numero infinitorum: Et ſolum ſuperficies Z ex revolutione hujus poligoni producta dimetienda erit. Ex ejuſdem enim ſuperficiei dimenſione ad dimenſionem ſphæræ facile progredietur, quemadmodum a rectilineis circulares figuræ metitæ ſunt.

LXII.

Ut ſuperficies ſolidi Z dimetiatur, conſideretur parva ſuperficies ab uno latere M*m* poligoni

ligoni inſcripti generata, dum ipſum circa ſuam diametrum A B revolvitur. Certum eſt latus M *m* deſcribere ſuperficiem coni obtruncati V. Nam ſi producatur recta *m* M donec
Fig. 36. Tab. 5. occurrat in T diametro ſeu axi revolutionis A B, & ſi hæc recta T M *m* eodem tempore ac ſemicirculus A M B circumagatur, ipſa deſcribet conum rectum cujus vertex erit T, baſis vero circulus deſcriptus a puncto *m*: ita ut ſuperficies V producta a latere M *m* erit pars coni inter circulos a punctis M, & *m* deſcriptos comprehenſa. Sed, ut dictum eſt Art. LIX., ſuperficies V æqualis eſt rectangulo cujus altitudo eſt M *m*, & baſis recta æqualis circumferentiæ K L O a puncto K medio inter M, & *m* deſcriptæ. Ergo ſuperficies producta ex revolutione poligoni æqualis erit ſummæ tot rectangulorum, quot ſunt latera poligoni, ut M*m*.

Porro cum omnia latera M *m* horum rectangulorum altitudines ſupponantur æqualia, conſiderari poteſt ſuperficies quæſita ut rectangulum cujus altitudo ſit M*m*, baſis autem æqualis ſummæ omnium circumferentiarum, quæ a puncto cujuſque lateris medio deſcribuntur, ut K L.

Verum cum poligonum ſemicirculo A M B inſcriptum habeat infinitum laterum numerum, conſtrui non poteſt id genus rectangulum tum propter exiguitatem altitudinis M*m* tum propter inordinatam baſis magnitudinem.

Ad hoc tollendum incommodum commuten-

rentur hæc parva rectangula in alia quorum altitudo non ſit exigua M *m*, ſed tantæ magnitudinis, ut quælibet baſis plurimum minuatur. Ea proter ſumma harum baſium altitudini poterit comparari.

LXIII.

Commutanda ſint igitur hæc parva rectangula. Ut hoc problema facilius reſolvatur, fac horum rectangulorum baſes non eſſe lineas æquales circumferentiis KL, ſed harum circumferentiarum radios KI. Quod de his rectangulis oſtendetur, iis applicari poterit, de quibus modo tractatur. *Fig.* 37. *Tab.* 5.

Igitur inveniendum eſt rectangulum, cujus menſura ſit productum ex M *m* in KI, & altitudo, linea quæ & multo major ſit quam M *m* & eadem perſeveret ubicumque collocetur parvum latus M*m*. Hæc ſit ex. gr. recta CK, quæ a centro poligoni ducta perpendicularis eſt lateri M *m* & eadem perſeverat cuique lateri hujus poligoni applicetur. Inquirenda eſt ergo recta, cujus productum in CK æquale ſit producto ex KI in M *m*, hoc eſt (II. Part. Art. VII.) invenienda quarta proportionalis his tribus KC, KI, M *m*. Jam vero cum compertum ſit ex triangulis ſimilibus lineas proportionales dignoſci, efficienda ſunt triangula ſimilia, quorum homologa latera quæſitas proportionales oſtendant. Quod præſtari poterit ducendo MR perpendicularem ad *mp*. Tunc enim duo triangula

M*m*R,

M *m* R, & KIC ſimilia erunt, cum anguli R & I ſint recti, & anguli *m* MR, IKC æquales, quia *m* MR una cum M *m* R æquali angulo MKI efficit unum rectum, quem efficit quoque IKC ſimul cum MKI.

Hinc concludi poterit KC eſſe ad KI ut M *m* ad MR, hoc eſt MR eſſe quartam proportionalem quæſitam, ſive rectangulum ex KC in MR vel P *p* æquale eſſe rectangulo ex M*m* in KI.

Sed quoniam rectangulum quod commutandum fuit non eſt rectangulum ex M *m* in KI ſed ex M*m* in circumferentiam cujus radius ſit KI, adverti debet circumferentias, ut demonſtratum fuit, eſſe inter ſe ut radios. Quapropter ex æqualitate rectangulorum ex M *m* in KI, & ex P *p* in CK deducitur æqualitas rectanguli ex M *m* in circumferentiam radii KI ad rectangulum ex P *p* in circumferentiam radii CK. Si enim baſes duorum rectangulorum æqualium proportionaliter augeantur, ſervata eadem altitudine, rectangula remanent æqualia.

LXIV.

Cum in duobus præcedentibus articulis compertum ſit omnes ſuperficies conicas obtruncatas ut V: (fig. 36. tab. 5.) æquales eſſe omnibus rectangulis quorum omnium altitudo ſit eadem recta æqualis circumferentiæ cujus radius eſt KC, & baſis ſit exigua recta P *p* reſpondens cuique lateri M *m*; innoteſcit ſummam

mam harum ſuperficierum ab A uſque ad *p* ex. gr. æqualem eſſe rectangulo cujus altitudo ſit recta æqualis circumferentiæ CK, baſis vero ſit ſumma omnium rectarum quæ ſunt, ut P*p*, ab A uſque ad *p*, hoc eſt recta A*p*.

Ut igitur habeatur menſura ſuperficiei a totius poligoni revolutione productæ, deſcribendum eſt rectangulum cujus baſis æqualis ſit circumferentiæ a radio CK deſcriptæ, & altitudo æqualis ſit diametro AB.

LXV.

Menſura ſuperficiei ſphæricæ eſt productum diametri in circumferentiam ſui maximi circuli.

Sphærica autem ſuperficies facile menſuratur. Etenim certum eſt quo plura erunt poligoni latera, eo magis corpus ex poligoni revolutione genitum ad ſphæram accedere, & perpendicularem CK ad radium, ita ut ſi concipi poteſt poligonum in circulum deſinere, conſiderari etiam poſſit perpendicularis CK veluti radius. Ergo ſuperficies ſphærica eamdem habebit extenſionem, ac rectangulum cujus altitudo ſit diameter, & baſis ſit recta æqualis circulo ejuſdem diametri, qui communiter maximus ſphæræ circulus appellatur.

LXVI.

Quid ſit ſegmentum ſphæricum ejuſque menſura.

Fig.38. Tab.5. Menſura vero ſegmenti ſphærici AMLNO, hoc eſt portionis ſphæricæ, quæ habetur dum ſphæra a plano MLNO diametro perpendiculari ſecatur, eſt productum axis AP in circumferentiam maximi circuli AMPN. Quod eodem modo demonſtratur, quo demonſtratum fuit Art. LXIV. ſummam ſuperficierum omnium parvorum conorum obtruncatorum, Fig.37. Tab.5. quæ ab A & *m* intercipiuntur, æqualem eſſe rectangulo cujus altitudo ſit A *p*, & baſis ſit recta æqualis circumferentiæ radii CK.

LXVII.

Superficies ſphærica æqualis eſt ſuperficiei cylindri circumſcripti.

Fig.39. Tab.5. Ex præcedenti ſuperficiei ſphæricæ dimenſione innoteſcit, ſi circumagatur rectangulum ABDE eodem tempore quo ſemicirculus AMNB circum AB revolvitur, ſuperficiem curvam cylindri recti EFGIKDH ex hujus rectanguli revolutione geniti æqualem eſſe ſuperficiei ſphæricæ a ſemicirculo deſcriptæ. Quod ſic ſolet enunciari. Superficies ſphærica æqualis eſt ſuperficiei cylindri circumſcripti.

LXVIII.

LXVIII.

Segmenta cylindrica & ſphærica eamdem habent ſuperficiem.

Si vero cylindrus & ſphæra biſecentur in P & Q duobus planis diametro A B perpendicularibus, ſegmenta ſphæræ & cylindri a recta OS & arcu MN genita, æqualem habebunt ſuperficiem.

LXIX.

Superficies ſphærica quadrupla eſt ſui maximi circuli.

Ex præcedentibus quoque conſtat ſuperficiem ſphæricam quadruplam eſſe areæ ſui maximi circuli, cum hujus maximi circuli menſura ſit productum dimidii radii ſive quartæ diametri partis in circumferentiam, menſura vero ſuperficiei ſphæricæ æqualis ſit producto totius diametri in eamdem circumferentiam.

LXX.

Soliditas ſphæræ eſt productum tertiæ partis radii in maximum ejusdem ſphæræ circulum quater ſumptum.

Quoniam ſuperficiei ſphæricæ menſura comperta eſt, facile ejuſdem ſphæræ ſoliditas invenietur. Sphæra enim poteſt conſiderari veluti ex infinitis parvis pyramidibus compacta,

 qua-

quarum vertices ſint ad centrum ſphæræ, baſes vero integram ipſius ſuperficiem conſtituant. Jam vero cum menſura cujuſque pyramidis ſit productum tertiæ partis altitudinis, hoc eſt ſphæræ radii in baſim, earum ſumma, ſive ſoliditas ſphæræ, erit productum tertiæ radii partis in ſuperficiem, hoc eſt in maximum ejuſdem ſphæræ circulum quater ſumptum.

LXXI.

Soliditas ſphære eſt bis tertia pars ſoliditatis cylindri circumſcripti.

Cum productum tertiæ radii partis in maximum circulum quater ſumptum idem ſit ac productum tertiæ radii partis quater ſumptæ, hoc eſt tertiæ diametri partis bis ſumptæ, in maximum circulum, & cum menſura ſoliditatis cylindri E F G I K D H ſit productum diametri in maximum circulum qui eſt ipſius baſis; ſoliditas ſphæræ erit bis tertia pars ſoliditatis cylindri circumſcripti.

LXXII.

Menſura ſoliditatis ſegmenti ſphærici.

Fig. 38. *Tab.* 5. Si menſuranda ſit ſoliditas ſegmenti ſphærici A L M N O, primo dimetienda eſt portio ſphæræ a revolutione ſectoris C A M genitæ, ducenda ſcilicet eſt tertia radii pars in ſuperficiem ſegmenti ſphærici propoſiti A M L N O. Deinde ab hoc producto demenda eſt

men-

menſura coni a revolutione trianguli C P M geniti, illius videlicet coni cujus baſis eſt circulus M L N O, & altitudo C P. Et tunc quod remanet erit menſura ſegmenti ſphærici.

LXXIII.

Quid ſit ſimilitudo duorum corporum quæ planis terminantur.

Nonnullæ de corporum ſimilium ſoliditate ac ſuperficie propoſitiones horum elementorum finem præſtabunt. Quæ quidem & facile occurrunt ſi quod duorum corporum ſimilitudinem determinat, conſideretur; & ignorari non poſſunt ſi quæ 1. Part. Art. XXXIV. & ſeq. dicta ſunt de figurarum planarum ſimilitudine, huc revocentur.

Articulo XXXII. ſtabilitum fuit ubi ſita ſit duarum pyramidum ſimilitudo. Quod profecto ad omnia corpora planis terminata extendi poteſt. Duo enim id genus corpora ſimilia ſunt cum & omnes anguli a lateribus unius intercepti æquales ſunt angulis alterius, & unius latera lateribns alterius ſunt proportionalia.

LXXIV.

Similitudo cylindrorum rectorum.

Quidnam vero requiratur ut corpora planis non terminata veluti cylindri & coni ſint ſimilia, facile determinatur.

Duo cylindri recti ſunt ſimiles ſi eorum altitudines ſint inter ſe ut baſium radii.

LXXV.

Similitudo cylindrorum obliquorum.

Si cylindri obliqui ſint ulterius oportet ut rectæ quæ in utroque cylindro circulorum centra conjungunt, efficiant angulos ſibi invicem æquales.

LXXVI.

Similitudo Conorum.

Hæc eadem definitio conis applicari poteſt, ſi pro recta, quæ per centrum tranſiens cylindri baſes conjungit, ſumatur recta quæ a vertice coni in centrum baſis deſcendit.

LXXVII.

Similitudo Conorum obtruncatorum.

Ut duo obtruncati coni ſint ſimiles oportet ut coni, quorum ſunt ſegmenta, ſint ſimiles: deinde ut eorum altitudines ſint inter ſe ut baſium radii.

LXXVIII.

Omnes figuræ quæ una tantum linea conſiciuntur ſunt ſimiles.

Optime intelligitur ſphæras omnes eſſe inter ſe ſimiles, ſicuti inter ſe ſimiles ſunt figuræ omnes ſive ſolidæ ſive planæ quæ ab una tantum linea generantur, ut Circuli, Quadra-

drata, Triangula æquilatera, Cubi, Cylindri ſphæræ circumſcripti &c.

LXXIX.

Solida ſimilia non differunt, niſi ex ſcalis quibus conficiuntur.

Et univerſim omnia ſolida ſimilia, ſicuti de figuris planis dictum eſt non differunt inter ſe niſi ex ſcalis quibus conſtructa ſunt. Unde duæ eruuntur fundamentales propoſitiones de corporum ſimilium ſuperficie, & ſoliditate.

LXXX.

Superficies ſolidorum ſimilium ſunt inter ſe ut quadrata. laterum homologorum.

Prima propoſitio docet duorum ſolidorum ſimilium ſuperficies eſſe inter ſe ut quadrata laterum homologorum, eamdem videlicet rationem eſſe ex. gr. inter ſuperficies duarum ſimilium pyramidum *z* & Z, ac inter quadrata *abcd*, ABCD laterum homologorum *ab*, AB. *Fig. 40. & 41. Tab. 5.*

Ad hanc demonſtrandam propoſitionem ſat eſt eumdem diſcurſum inſtituere, qui ſuperius 1. Part. Art. XLIII. & XLIV. Solum videlicet conſiderandum eſt, ſi P eſt ſcala pyramidis Z & *p* ſcala ſimilis pyramidis *z*, toties P contineri in lineis quibus metiri oportet ſuperficies & Z & quadrati ABCD, quoties *p* continebitur in lineis quibus metiri oportet

ſuperficies & pyramidis *z* & quadrati *abcd*.

Hinc enim ſequitur, ex producto linearum quibus menſurantur Z & ABCD eumdem haberi numerum quadratorum X ſuper P conſtructorum, qui habetur quadratorum *x* conſtructorum ſuper *p* a producto linearum quibus metitæ ſunt ſuperficies *z* & *abcd*. Hoc eſt. numeri qui exprimeſt rationem ſuperficiei pyramidis Z ad quadratum ABCD, iidem erunt qui exprimeſt rationem ſuperficiei *z* ad quadratum *abcd*.

Idem dicendum eſt de comparatione ceterorum corporum ſive planis ſive curvis ſuperficiebus ſint terminata. Lineæ enim quibus horum corporum ſuperficies dimetientur eumdem partium numerum continebunt ſcalarum ſuarum, & conſequenter harum linearum producta continebunt eumdem numerum quadratorum ipſarum partium.

Idem adhuc ſentiendum eſt ſi lineæ quibus corporum ſimilium ſuperficies metiri oportet ſint incommenſurabiles. Revocari enim debet principium quod (II. Part. Art. XXVIII.) traditum eſt de comparatione figurarum ſimilium quarum latera ſunt incommenſurabilia.

LXXXI.

Superficies ſphæricæ ſunt inter ſe ut radiorum quadrata.

Eadem ratione demonſtrari poſſet ſuperficies ſphæricas eſſe inter ſe ut radiorum quadrata. Verum ut hoc clarius quoque aliunde in-

intelligatur, ſat erit animadvertere ſuperficies circulares eſſe inter ſe ut radiorum quadrata (III. Part. Art VI.), & ſuperficies ſphæricas eſſe quadruplas ſuorum maximorum circulorum (Art. LXIX.)

LXXXII.

Proportio inter ſuperficies corporum ſimilium & quadrata laterum homologorum adeo univerſalis eſt ut quibuſcumque corporibus applicari poſſit, ſive cognoſcatur ſive ignoretur eorum menſura.

Etſi ſuperficies cylindri obliqui ex. gr. menſurari nequeat, affirmari tamen poteſt ſuperficies duorum cylindrorum obliquorum ſimilium eſſe inter ſe ut quadrata diametrorum baſium. Si enim duobus cylindris duo priſmata ſimilia quarumcumque facierum inſcribantur, ſuperficies horum priſmatum, ex præcedentibus, erunt inter ſe ut quadrata diametrorum baſium. Ergo ſuperficies quoque cylindricæ, ſi conſiderentur veluti ultima priſmata ipſis inſcripta eamdem inter ſe rationem habebunt.

LXXXIII.

Solida ſimilia ſunt inter ſe ut cubi laterum homologorum.

Propoſitio fundamentalis pro comparatione ſoliditatis corporum ſimilium eſt:

Solida ſimilia ſunt inter ſe ut cubi laterum homologorum.

Hæc propoſitio eadem ratione demonſtrari poteſt, qua antecedens fuit demonſtrata, animadvertendo figuras ſimiles non differre niſi ex ſcalis quibus conſtructæ ſunt.

Verum ut ſimplicius quo fieri poſſit oſtendatur, adhibeantur ex. gr. duo priſmata ſimilia Z & z, & duo cubi X & *x* quorum latera ſint æqualia lateribus priſmatum proportionalibus A B & *a b*. Adhibeantur inſuper duæ ſcalæ A B, *a b* multifariam diviſæ. Porro certum eſt tot cubos ſuper partes ſcalæ *ab* factos contineri in priſmate z, & in cubo *x*, quot cubi ſuper partes ſcalæ A B facti continentur in priſmate Z & cubo X.

Fig.42. & 43. Tab.5.

Idem dicendum eſt de ceteris ſolidis. Et ea etiam quæ ſunt incommenſurabilia, ſunt inter ſe ut cubi laterum homologorum.

LXXXIV.

Proportio ſphærarum inter ſe.

Soliditates ſphærarum ex. gr. ſunt inter ſe ut ſuorum radiorum cubi.

F I N I S.

INDEX RERUM

Quæ in his elementis continentur.

PARS PRIMA.

De naturali methodo agros dimetiendi.

ARTICULUS PRIMUS.

QUod primo metiendum fuiſſe videtur, longitudines ſunt, ac diſtantiæ. pag. 1

Art. II. *Linea recta eſt minima omnium, quæ inter duo puncta duci poſſunt; & ideo eſt menſura diſtantiæ inter ipſa.* ibid.

Art. III. *Recta ſuper rectam inſiſtens, & in neutram partem inclinans eſt perpendicularis.* 2

Art. IV. *Rectangulum eſt figura quatuor laterum ſibi invicem perpendicularium.* ibid.

Art. V. *Modus perpendicularem excitandi.* 3

Art. VI. *Circulus eſt linea deſcripta ab una circini extremitate in orbem acta, altera immobili permanente. Ejus centrum eſt punctum, ubi extremitas circini manet immobilis. Radius*

dius vero eſt intervallum, quo circinus in deſcribendo circulo aperitur. 4

Art. VII. *Modus perpendicularem demittendi.* 5

Art. VIII. *Datam rectam biſariam ſecare.* ibid.

Art. IX. *Ex data recta quadratum conficere.* 6

Art. X. *Rectangulum deſcribere data ejus longitudine ac latitudine.* ibid.

Art. XI. *Parallelæ ſunt rectæ æqualibus ſemper intervallis inter ſe diſtantes.* 7

Art. XII. *Menſura rectanguli eſt productum altitudinis in baſim.* ibid.

Art. XIII. *Figuræ rectilineæ eæ ſunt quæ rectis lineis conficiuntur.* 9

Art. XIV. *Diagonalis rectanguli eſt linea, quæ ipſum dividit in duo triangula æqualia.* 10

Art. XV. *Triangula ſuper eadem baſi & eadem altitudine conſtituta ſuperficiem habent æqualem.* 11

Art. XVII. *Triangula ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas conſtituta habent ſuperficiem æqualem.* 12

Art. XVIII. *Parallelogramma ſunt figuræ quadrilateræ, quarum bina opoſita latera ſunt parallela: & dimetiuntur multiplicando eorum altitudinem in baſim.* 13

Art. XIX. *Parallelogramma ſuper eadem baſi & inter eaſdem parallelas conſtituta ſunt æqualia.* 14

Art. XX. *Poligona regularia ſunt quæ terminantur lateribus æqualibus æqualiter ſibi invicem inclinatis.* ibid.

Art. XXI. *Modus deſcribendi poligonum quod habeat determinata latera.* 15

Art. XXII. *Menſura ſuperficiei cujuſcumque poligoni regularis.* ibid.
Art. XXIII. *Modus deſcribendi triangulum æquilaterum, quod videlicet tria latera habet æqualia.* 16
Art. XXVI. *Tribus trianguli lateribus cognitis triangulum alterum ipſi æquale deſcribere.* 18
Art. XXVIII. *Modus deſcribendi angulum alteri æqualem.* 19
Art. XXIX. *Altera methodus deſcribendi angulum alteri æqualem.* 20
Art. XXXI. *Triangulum Iſoſceles eſt quod duo latera habet æqualia. Anguli vero inter hæc latera & baſim comprehenſi ſunt æquales.* 21
Art. XXXIV. *In quo ſita ſit figurarum ſimilitudo.* 23
Art. XXXVI. *Modus deſcribendi figuram alteri ſimilem.* 24
Art. XXXVIII. *Si duo anguli unius trianguli æquales ſint duobus alterius trianguli, tertii quoque erunt æquales.* 25
Art. XXXIX. *Duo triangula, quorum anguli ſunt ſibi invicem æquales, habent latera proportionalia.* 26
Art. XLI. *Quid ſit quarta proportionalis tribus rectis, & quomodo inveniatur.* 28
Art. XLII. *Altitudines triangulorum ſimilium lateribus ſunt proportionales.* 29
Art. XLIV. *Areæ Triangulorum ſimilium ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum.* 30
Art. XLV. *Proprietates figurarum ſimilium ex proprietatibus triangulorum ſimilium deductæ.* 31

Art. XLVII. *Areæ figurarum ſimiliùm ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum.* 33

Art. XLVIII. *Figuræ ſimiles non differunt inter ſe niſi ex ſcalis quibus confectæ ſunt.* ibid.

Art. L. *Modus dimetiendi diſtantiam loci inacceſſibilis.* 34

Art. LII. *Anguli menſura eſt arcus Circuli ab anguli lateribus comprehenſus.* 35

Art. LIII. *Circulus dividitur in 360. gradus: quiſque gradus in 60. minuta &c.* 36

Art. LIV. *Angulus rectus habet 90. gradus, & ejus latera ſunt ſibi invicem perpendicularia.* ibid.

Art. LV. *Angulus acutus eſt minor recto.* 37

Art. LVI. *Angulus obtuſus major eſt angulo recto.* ibid.

Art. LVII. *Summa angulorum qui ab una recta ſuper quamcumque rectam efficiuntur, & quorum omnium idem eſt vertex, æqualis eſt gradibus* 180. ibid.

Art. LVIII. *Omnes anguli qui circa idem punctum conſtitui poſſunt, æquales ſunt ſimul ſumpti quatuor rectis.* ibid.

Art. LIX. *Uſus inſtrumenti quod ſemicirculus vocatur, ad dignoſcendam anguli magnitudinem.* 38

Art. LX. *Uſus inſtrumenti quo efficitur angulus qui datum numerum graduum contineat.* 39

Art. LXIII. *Anguli alterni ſunt anguli oppoſiti qui conficiuntur utrinque a recta linea ſuper duas parallelas ducta: & ſunt æquales.* 41

Art. LXIV. *Summa angulorum cujuſcumque trianguli eſt æqualis duobus rectis.* ibid.

Art.

Art. LXVIII. *Omnis trianguli quivis angulus externus æqualis eſt duobus internis oppoſitis.* 42

Art. LXIX. *Cognito uno angulo trianguli Iſoſcelis ceteri duo cognoſcuntur.* 43

Art. LXX. *In triangulo æquilatero quivis angulus continet gradus 60.* ibid.

Art. LXXI. *Deſcriptio Hexagoni.* 44

Art. LXXII. *Ex dimidio anguli ad centrum Hexagoni eruitur angulus ad centrum Duodecagoni.* ibid.

Art. LXXIII. *Datum angulum æqualiter dividere.* 45

Art. LXXIV. *Deſcriptio poligonorum* 24., 48. *&c. laterum.* ibid.

Art. LXXV. *Deſcrrptio Octogoni, & Poligonorum, quæ* 16., 32. *&c. latera habeant.* ibid.

PARS SECUNDA.

De geometrica comparatione figurarum rectilinearum.

ARTICULUS PRIMUS.

DUa rectangula quæ eamdem habent altitudinem ſunt in eadem ratione ac eorum baſes. 48

Art. v. *Modus rectangulum commutandi in aliud datæ altitudinis.* 49

Art. vi. *Altera methodus rectangulum commutandi in aliud, cujus data ſit altitudo.* 50

Art. vii. *Demonſtratur, poſita duorum rectangulorum æqualitate, baſim primi eſſe ad baſim alterius, ut huius altitudo ad altitudinem primi.* 51

Art. xiii. *Regula aurea, ſive modus inveniendi quartum proportionis terminum, datis tribus primis.* 53

Art. xvi. *Quadratum conſtituere duplum alterius.* 55

Art. xvii. *Quadratum æquale duobus aliis ſimul ſumptis deſcribere.* 56

Art. xviii. *Majus latus trianguli rectanguli hypotenuſa vocatur. Et quadratum hujus lateris eſt æquale quadrato aliorum laterum.* 57

Art. xix. *Simplex modus duo quadrata in unum commutandi.* 58

Art.

Art. xx. *Si trianguli rectanguli latera ſint baſes trium ſimilium figurarum, figura hypotenuſæ erit æqualis ceteris duabus ſimul ſumptis.* ibid.

Art. xxi. *Plures figuras ſimiles ſimul addere.* 59

Art. xxiii. *Quadratum numeri eſt productum ex ſui multiplicatione: Et radix quadrati eſt numerus, cujus productum ex ſui multiplicatione eſt quadratum.* 60

Art. xxiv. *Numerus eſt alterius multiplex cum ipſum pluries exacte continet. Et latus quadrati eſt incommenſurabile cum ſui diagonali.* 61

Art. xxv. *Aliæ lineæ incommenſurabiles.* 62

Art. xxvii. *Triangula & omnes figuræ ſimiles habent latera proportionalia etiam cum hæc ſunt incommenſurabilia.* 63

Art. xxviii. *Figuræ ſimiles ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum, etiam dum hæc ſunt incommenſurabilia.* 65

PARS

PARS TERTIA.

De dimenſione & proprietatibus figurarum circularium.

ARTICULUS PRIMUS.

MEnſura circuli eſt productum ex circumferentia in dimidium radii. 68

Art. v. *Peripheriæ Circulorum ſunt inter ſe ut eorum radii.* 70

Art. vi. *Areæ circulorum ſunt proportionales radiorum quadratis.* ibid.

Art. vii. *Ex tribus circulis quorum radii ſunt trianguli rectanguli latera, ille cujus radius ſit hypotenuſa, æqualis eſt duobus aliis ſimul ſumptis.* 71

Art. viii. *Corona eſt ſpatium contentum inter duos circulos idem centrum habentes; ejuſque menſura eſt productum ex ſui altitudine in circumferentiam mediam.* ibid.

Art. ix. *Segmentum circuli eſt ſpatium arcu & chorda terminatum. Et dimenſio cujuſcumque figuræ circularis reducitur ad dimenſionem ſegmenti* 73

Art. x. *Sector eſt pars circuli a duobus radiis & arcu quem intercipiunt, comprehenſa.* ibid.

Art. xi. *Centrum cujuſcumque circuli arcus invenire.* 74

Art. xiii. *Duæ rectæ ex quocumque puncto circumferentiæ ſemicirculi ad extremitates diametri*

i ductæ efficiunt angulum rectum. 75

x. Omnes anguli quorum vertices ſunt ad iberiam, & qui eidem arcui inſiſtunt, les ſunt: & hujuſmodi arcus dimidium orum communis menſura. 77

VIII. Tangens Circuli eſt linea quæ ip- in puncto tangit. Et angulus a chorda angente interceptus vocatur angulus ad ntum: ejuſque menſura eſt dimidium ar- gmenti. 79

x. Tangens eſt perpendicularis diametro unctum contactus tranſeunti. 81

XI. Segmentum dati anguli capax. Et is illud deſcribendi. 82

XII. Diſtantiam invenire unius loci a s aliis, quorum diſtantiæ cognoſcuntur. ibid.

XIII. Datis in circulo duabus chordis ſe utuo ſecantibus, rectangulum ex partibus s æquale erit rectangulo ex partibus al- is. 84

XIV. Quadratum cujuſcumque perpendicu- ad diametrum æquale eſt rectangulo ex ibus diametri. 85

XV. Rectangulum in quadratum commu-. ibid.

XVI. Methodus inveniendi mediam propor- alem. 86

XVII. Altera methodus inveniendi me- n proportionalem. ibid.

XVIII. Figuram rectilineam in quadratum vertere. 87

XXX. Quadratum efficere quod ſit ad aliud

P A R S … T

De dimenſ… … ietat… … ium

A … US

M … A …

… *ſ* … *adi* … *fe*

… *us*

… *ncto* … *tates* … *met*

metri ductæ efficiunt angulum rectum. 75
Art. xv. *Omnes anguli quorum vertices ſunt ad peripheriam, & qui eidem arcui inſiſtunt, æquales ſunt: & hujuſmodi arcus dimidium eſt eorum communis menſura.* 77
Art. xviii. *Tangens Circuli eſt linea quæ ipſum in puncto tangit. Et angulus a chorda & tangente interceptus vocatur angulus ad ſegmentum: ejuſque menſura eſt dimidium arcus ſegmenti.* 79
Art. xix. *Tangens eſt perpendicularis diametro per punctum contactus tranſeunti.* 81
Art. xxi. *Segmentum dati anguli capax. Et modus illud deſcribendi.* 82
Art. xxii. *Diſtantiam invenire unius loci a tribus aliis, quorum diſtantiæ cognoſcuntur.* ibid.
Art. xxiii. *Datis in circulo duabus chordis ſe ſe mutuo ſecantibus, rectangulum ex partibus unius æquale erit rectangulo ex partibus alterius.* 84
Art. xxiv. *Quadratum cujuſcumque perpendicularis ad diametrum æquale eſt rectangulo ex partibus diametri.* 85
Art. xxv. *Rectangulum in quadratum commutare.* ibid.
Art. xxvi. *Methodus inveniendi mediam proportionalem.* 86
Art. xxvii. *Altera methodus inveniendi mediam proportionalem.* ibid.
Art. xxviii. *Figuram rectilineam in quadratum convertere.* 87
Art. xxx. *Quadratum efficere quod ſit ad aliud*

in ratione data. 88

Art. xxxi. *Poligonum efficere quod ſit ad aliud ſimile in ratione data.* 89

Art. xxxii. *Circulum efficere qui ſit ad alium in ratione data.* ibid.

Art. xxxiii. *Si ex quocumque puncto extra Circulum duæ rectæ ducantur, quæ circulum ſecent, & in cavam peripheriam incidant, rectangula ex his ſectis in ſuas externas partes erunt æqualia.* ibid.

Art. xxxiv. *Quadratum tangentis æquale eſt rectangulo ex ſecante in ſuum externam partem.* 90

Art. xxxv. *Tangentem ad circulum ducere ex puncto extra ipſum dato.* 91

PARS QUARTA.

De methodo dimetiendi ſolida, eorumque ſuperficiem.

ARTICULUS PRIMUS.

Cubus eſt ſolidum ſex quadratis terminatum, & eſt communis ſolidorum menſura. 93

Art. II. *Parallelepipedum eſt ſolidum ſex rectangulis terminatum. Et plana parallela vocantur quæ inter ſe æqualiter ſemper diſtant.* 94

Art. III. *Parallelepipedi menſura.* ibid.

Art. IV. *Parallelepipeda producuntur ex rectangulo quod ſibimet parallele moveatur.* 95

Art. V. *Recta eſt plano perpendicularis cum ei inſiſtens in neutram partem inclinat. Idem dicendum de plano quod alteri ſit perpendiculare.* 96

Art. VI. *Recta plano perpendicularis eſt perpendicularis omnibus rectis quæ diſcedunt a puncto, quo illa cadit, & ſunt in eodem plano.* ibid.

Art. VIII. *Modus practicus aut excitandi aut demitiendi perpendicularem ad quodcumque planum.* 97

Art. IX. *Linea eſt perpendicularis plano ſi eſt perpendicularis duabus lineis hujus plani, quæ ab eodem puncto diſcedant quo illa cadit.* 98

Art. x. *Modus excitandi Planum alteri perpendiculare.* 98
Art. xii. *Unius plani ad alterum inclinationem metiri.* 99
Art. xiii. *Unius rectæ ad planum inclinationem metiri.* ibid.
Art. xiv. *Nova methodus demittendi perpendicularem Plano.* 100
Art. xv. *Altera methodus excitandi perpendicularem dato plano.* 101
Art. xvi. *Priſma rectum eſt figura ſolida, cujus duæ oppoſitæ baſes ſunt duo æqualia poligona, & ceteræ ſuperficies ſunt rectangula.* ibid.
Art. xvii. *Conſtructio priſmatis recti.* ibid.
Art. xix. *Duo priſmata, quorum baſes ſunt æquales, ſunt inter ſe in ratione altitudinum.* 102
Art. xx. *Duo priſmata ejuſdem altitudinis ſunt inter ſe in ratione baſium.* ibid.
Art. xxi. *Menſura priſmatis recti eſt productum baſis in altitudinem.* 103
Art. xxii. *Inter recta & obliqua priſmata hoc intereſt ut plana quæ in rectis rectangula ſunt, in obliquis ſunt parallelogramma.* 104
Art. xxiii. *Conſtructio priſmatis obliqui.* ibid.
Art. xxv. *Parallelepipeda obliqua rectis æqualia ſunt cum eandem baſim, eandemque altitudinem habent.* 105
Art. xxx. *Quod confirmatur ſequentibus animadverſionibus.* 107
Art. xxxii. *Quid ſit ſimilitudo duarum pyramidum.* 108

Art.

Art. XXXVII. *Pyramides ſuper eadem baſi & inter eamdem altitudinem conſtitutæ ſunt æquales.* 110

Art. XXXVIII. *Si duarum pyramidum eadem ſit altitudo, & baſes non ſint poligona ſimilia, ſed tantum ſuperficie æquales, adhuc pyramides ſunt æquales.* 111

Art. XXXIX. *Pyramides ejusdem altitudinis ſunt inter ſe ut baſes.* 112

Art. XLII. *Soliditas pyramidis eſt productum baſis in tertiam partem altitudinis.* 115

Art. XLIII. *Pyramis eſt tertia pars priſmatis eamdem baſim eamdemque altitudinem habentis.* ibid.

Art. XLV. *Cylindrus eſt ſolidum duobus circulis oppoſitis & parallelis terminatum, & plano circa eorum peripherias flexo. Alius rectus eſt, alius obliquus.* 116

Art. XLVI. *Cylindri geneſis.* 117

Art. XLVII. *Superficies curva Cylindri recti æqualis eſt rectangulo cujus eadem ſit altitudo; & baſis æqualis ejusdem Cylindri circumferentiæ.* ibid.

Art. XLIX. *Cylindri ejusdem baſis & altitudinis ſunt æqualis ſoliditatis.* 119

Art. LI. *Conus eſt pyramis cujus baſis eſt circulus.* ibid.

Art. LII. *Conus alius eſt rectus, alius obliquus.* ibid.

Art. LIII. *Menſura ſuperficiei coni recti eſt productum circumferentiæ baſis in dimidium lateris.* 120

Art. LIV. *Conus reſolvitur in ſectorem circuli.* ibid.

Art.

Art. LVI. *Coni ejuſdem baſis & altitudinis ſunt æquales.* 121
Art. LIX. *Methodus dimetiendi ſuperficiem Coni obtruncati.* 122
Art. LX. *Corpus, cujus ſuperficiei puncta omnia æqualiter diſtant a centro, vocatur Sphæra.* 123
Art. LXV. *Menſura ſuperficiei ſphericæ eſt productum diametri in circumferentiam ſui maximi circuli.* 127
Art. LXVI. *Quid ſit ſegmentum ſphæricum ejuſque menſura.* 128
Art. LXVII. *Superficies ſphærica æqualis eſt ſuperficiei cylindri circumſcripti.* ibid.
Art. LXVIII. *Segmenta cylindrica & ſphærica eamdem habent ſuperficiem.* 129
Art. LXIX. *Superficies ſphærica quadrupla eſt ſui maximi circuli.* ibid.
Art. LXX. *Soliditas ſphæræ eſt productum tertiæ partis radii in maximum ejuſdem ſphæræ circulum quater ſumptum.* ibid.
Art. LXXI. *Soliditas ſphæræ eſt bis tertia pars ſoliditatis cylindri circumſcripti.* 130
Art. LXXII. *Menſura ſoliditatis ſegmenti ſphærici.* ibid.
Art. LXXIII. *Quid ſit ſimilitudo duorum corporum quæ planis terminantur.* 131
Art. LXXIV. *Similitudo cylindrorum rectorum.* ibid.
Art. LXXV. *Similitudo cylindrorum obliquorum.* 132
Art. LXXVI. *Similitudo Conorum.* ibid.
Art. LXXVII. *Similitudo Conorum obtruncatorum.* ibid.

Art.

Art. LXXVIII. *Omnes figuræ quæ una tantum linea conficiuntur ſunt ſimiles.* 132
Art. LXXIX. *Solida ſimilia non differunt, niſi ex ſcalis quibus conficiuntur.* 133
Art. LXXX. *Superficies ſolidorum ſimilium ſunt inter ſe ut quadrata laterum homologorum.* ibid.
Art. LXXXI. *Superficies ſphæricæ ſunt inter ſe ut radiorum quadrata.* ibid.
Art. LXXXIII. *Solida ſimilia ſunt inter ſe ut cubi laterum homologorum.* 135
Art. LXXXIV. *Proportio ſphærarum inter ſe.* 136

NOI RIFORMATORI

Dello Studio di Padova.

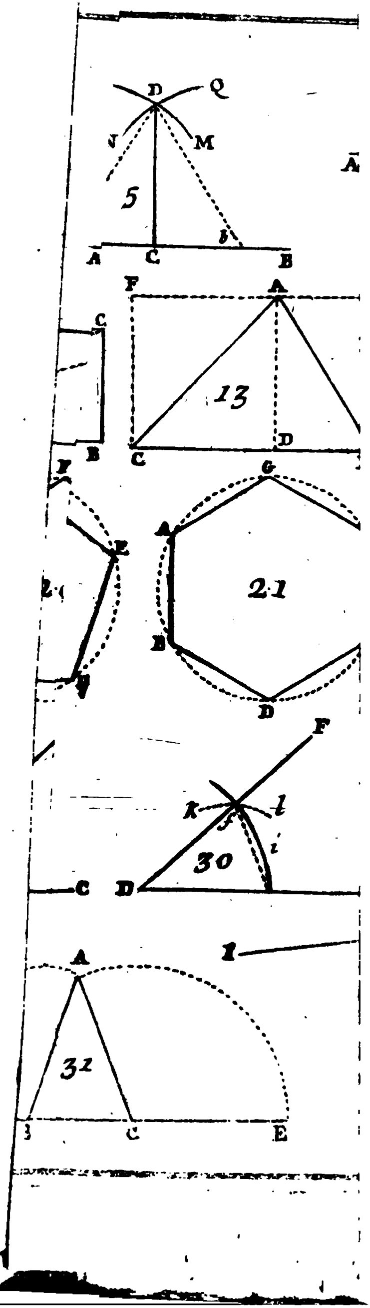
AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del P. *Fra Paolo Tommaſo Manuelli* Inquiſitore Generale del Santo Officio di *Venezia*, nel Libro intitolato: *Elementa Geometriæ A. D. Clairaut Regiæ Scientiarum Pariſienſis Accademiæ &c. Gallico ſermone edita, & latine reddita*, non v'eſſer cos' alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi, concediamo Licenza a *Gio: Battiſta Recurti* Stampatore *di Venezia*, che poſſa eſſere ſtampato, oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librerie di Venezia, e di Padova.

Data li 22. Decembre 1748.

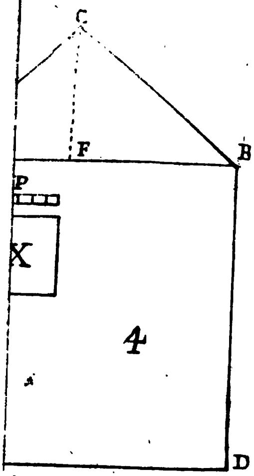
(Barbon Moroſini Cav. Proc. Ref.
(Marco Foſcarini Cav. Proc. Ref.

Regiſtrato a Carte 40. al n. 332.

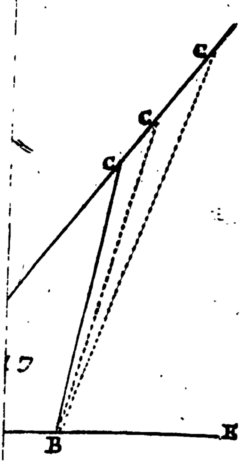
Michel Angelo Marino Segretario.



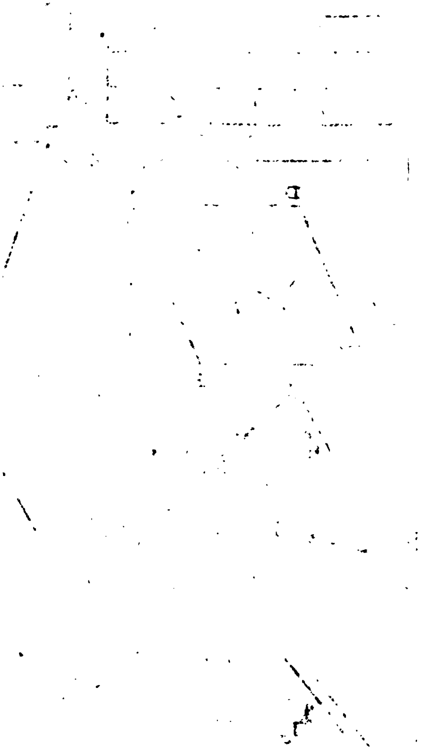
UNIV. OF

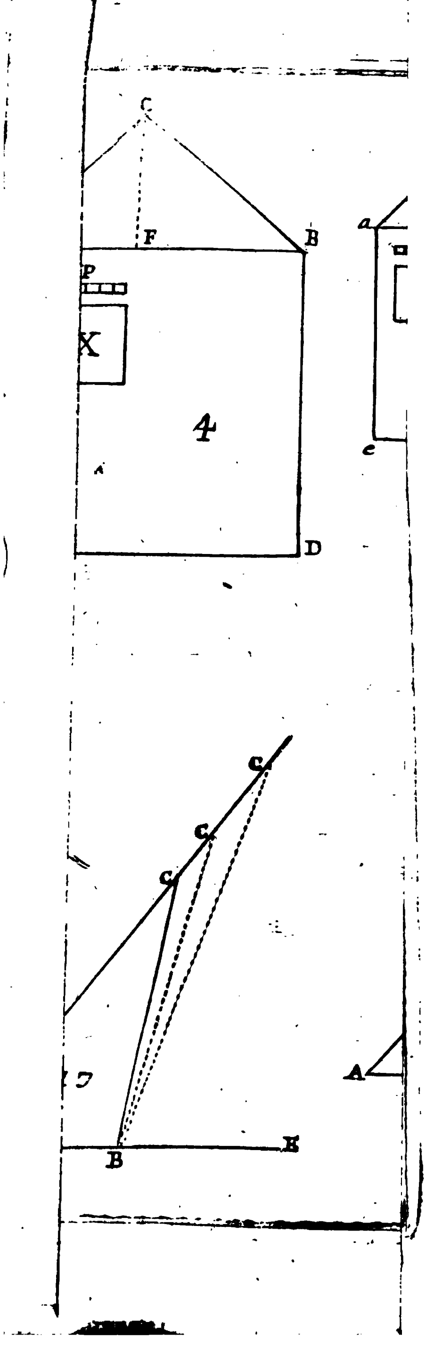

C
F
B
P
X
4
D

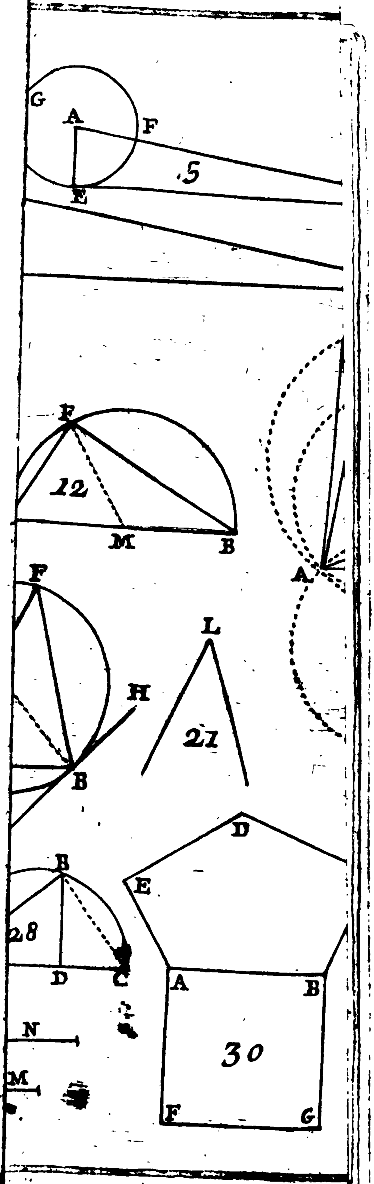

a
e


C
C
C
B
E


A




C
F
B
P
X
4
a
e
D
C
C
C
A
B
E



UNIV. OF MICH.